

北海道大学 正会員 渡辺 昇
 " " 佐藤 浩一
 " 学生員 O 川瀬 健夫

1. まえがき

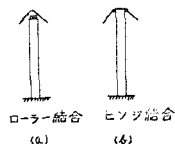
本報告は、図-1(a)のような塔とケーブルとがローラー結合の場合の、多径間連続吊橋(図-2)の静力学的解析法の一つとして、図-3のように多径間連続吊橋の中面支点に未知垂直集中荷重を作用させ、これを Dirac の Delta 関数で表し、Laplace 変換あるいは Fourier 変換を施し、多径間連続吊橋の支束条件(沈下なしの条件)を満たすように、未知反力を Green 関数を用いて決定する。未知反力が求まれば、吊橋のオニの基礎方程式から、ケーブルの水平張力が求まり、多径間連続吊橋の補剛桁のたわみ、断面力が、連続桁の全長を単純桁とした時の Green 関数のみで表示できる。

2. 吊橋の微分方程式

図-2 は塔とケーブル類は省略してあるが、ローラー結合の場合の、多径間連続吊橋の補剛桁の上を集中荷重 $P=1$ が移動する時の吊橋の微分方程式は、補剛桁に引張軸力 H が作用し、集中荷重 $P=1$ がき点に作用し、未知数 H_p , X_r が荷重として作用している時の単純桁の微分方程式と同等であるから式(1)となり、ケーブルの基礎方程式は式(2)となる。

$$EI \cdot v''(x) - H \cdot v''(x) = P \delta(x - \xi) + H_p y'' + \sum_{r=1}^{n-1} X_r \delta(x - l_r) \quad \dots \dots (1)$$

$$H_p \frac{L_c}{E_c A_c} + y'' \int_0^L v(x) dx = 0 \quad \dots \dots (2)$$



式(1)と式(2)とを連立させ、 $v(x)$, H_p を求めていく、

連続桁の全長を単純桁とした時の境界条件は式(3)、式(4)

$$\text{である。 } v(0) = v''(0) = 0 \quad \dots \dots (3)$$

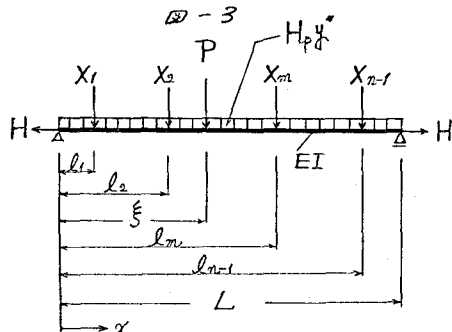
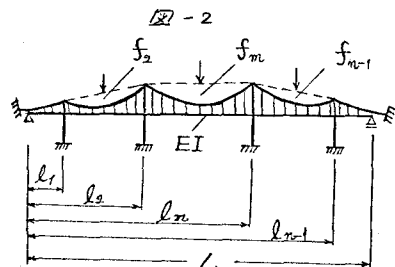
$$v(L) = v''(L) = 0 \quad \dots \dots (4)$$

$$\text{また } \mu^2 = H/EI \quad \dots \dots (5)$$

ここで、 EI : 補剛桁の曲げ剛性(タ・㎡), $H = H_g + H_p(x)$,
 $L_c = \int_0^L \frac{dx}{\cos^3 \varphi}$ (m), φ : 水平方向に対するケーブルの傾斜角,
 $y'' = -\frac{8\delta}{L^2}$ (1/m), E_c : ケーブル材のヤング係数(タ/㎡)

A_c : ケーブル材の断面積(㎡), $v(x)$: 活荷重による補剛桁の鉛直方向のたわみ(m), P : 集中荷重(x), y : 活荷重無載荷におけるケーブルの垂下曲線の座標(m), x : 着目点の位置の座標(m), ξ : 集中荷重 P の作用点の座標(m),

式(1)を Laplace 変換あるいは Fourier 変換し、 $v(x)$ を H_p , X_r を含んだ形で求める。この $v(x)$ を式(2)に代入して H_p を求める。



3 Laplace変換による解法

式(1)にLaplace変換を施し、式(3)を代入すれば、式(6)となる。

$$v(s) = \frac{1}{s^2} v(0) + \frac{1}{s^2(s^2 + \mu^2)} v''(0) + \frac{P}{EI} \frac{e^{-s\xi}}{s^2(s^2 + \mu^2)} + \frac{H_p y''}{EI} \frac{1}{s^2(s^2 + \mu^2)} + \frac{1}{EI} \sum_{r=1}^{n-1} X_r \frac{e^{-s l_r}}{s^2(s^2 + \mu^2)} \quad \dots \dots (6)$$

式(6)を逆変換すれば、式(7)となる。ここで $E(x-\xi)$, $E(x-l_r)$ はステップ関数である。

$$v(x) = v(0)x + \frac{1}{\mu^2} \left\{ \frac{1}{x} \sinh \mu x - x \right\} v''(0) + \frac{P}{EI} \frac{1}{\mu^2} \left\{ \frac{1}{x} \sinh \mu(x-\xi) - (x-\xi) \right\} E(x-\xi) \\ + \frac{H_p y''}{EI} \frac{1}{\mu^2} \left\{ \frac{1}{x} \sinh \mu x - 1 \right\} - \frac{1}{2} x^2 \left\{ + \frac{1}{EI} \sum_{r=1}^{n-1} X_r \frac{1}{\mu^2} \left\{ \frac{1}{x} \sinh \mu(x-l_r) - (x-l_r) \right\} E(x-l_r) \right\} \dots \dots (7)$$

式(7)に式(4)を代入すれば、 $v(0)$, $v''(0)$ に関する2本の方程式が得られる。式(8), 式(9)

$$\text{即ち, } v''(0) = -\frac{P}{EI} \frac{\sinh \mu(L-\xi)}{\sinh \mu L} - H_p y'' \frac{1}{EI} \frac{1}{\mu} \frac{\cosh \mu L - 1}{\sinh \mu L} - \frac{1}{EI} \sum_{r=1}^{n-1} X_r \frac{\sinh \mu(L-l_r)}{\sinh \mu L} \quad \dots \dots (8)$$

$$v(0) = \frac{P}{H} \left\{ \left(1 - \frac{\xi}{L}\right) - \frac{\sinh \mu(L-\xi)}{\sinh \mu L} \right\} + H_p y'' \frac{1}{H} \left\{ \frac{1}{2} L - \frac{1}{\mu} \frac{\cosh \mu L - 1}{\sinh \mu L} \right\} \quad \dots \dots (9)$$

式(8), 式(9)を式(7)に代入すれば、式(10)のようになる。

$$v(x) = P \frac{1}{H} \left\{ \frac{x}{L} \left(1 - \frac{\xi}{L}\right) - \frac{\sinh \mu x \cdot \sinh \mu(L-\xi)}{\mu L \cdot \sinh \mu L} + \left\{ \frac{\sinh \mu(x-\xi)}{\mu L} - \frac{x-\xi}{L} \right\} E(x-\xi) \right\} \\ + H_p y'' \frac{1}{H} \left\{ \frac{x}{2} \left(1 - \frac{\xi}{L}\right) - \frac{1}{(\mu L)^2} \left\{ 1 - \frac{\cosh \mu \left(\frac{x}{2} - x\right)}{\cosh \mu \frac{L}{2}} \right\} \right\} \\ + \frac{1}{H} \sum_{r=1}^{n-1} X_r \left\{ \frac{x}{L} \left(1 - \frac{l_r}{L}\right) - \frac{\sinh \mu x \cdot \sinh \mu(L-l_r)}{\mu L \cdot \sinh \mu L} + \left\{ \frac{\sinh \mu(x-l_r)}{\mu L} - \frac{x-l_r}{L} \right\} E(x-l_r) \right\} \dots (10)$$

式(10)で、 H_p , X_r を含んだ形で、 $v(x)$ が求まる。また、式(10)は、連続桁の全長を単純桁とした時のGreen関数 $K(x, \xi)$ を用いれば、式(11)のようになる。

$$v(x) = P \cdot K(x, \xi) + H_p y'' \int_0^L K(x, \xi) d\xi + \sum_{r=1}^{n-1} X_r K(x, l_r) \quad \dots \dots (11)$$

次に、中間支束の条件は、式(12)にあるから、式(12)を式(11)に代入すれば、式(13)のようになる。

$$v(l_i) \equiv 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad \dots \dots (12)$$

$$v(l_i) = P \cdot K(l_i, \xi) + H_p y'' \int_0^L K(l_i, \xi) d\xi + \sum_{r=1}^{n-1} X_r K(l_i, l_r) \equiv 0 \quad \dots \dots (13)$$

$$\therefore \sum_{r=1}^{n-1} X_r K(l_i, l_r) = -P K(l_i, \xi) - H_p y'' \int_0^L K(l_i, \xi) d\xi \quad \dots \dots (14)$$

式(14)で $A_{ij} = K(l_i, l_r)$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1,n-1} \\ A_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ A_{n-1,1} & \dots & \dots & A_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n-1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_{10} \\ f_{20} \\ \vdots \\ f_{n-1,0} \end{bmatrix} \quad \dots \dots (16)$$

式(16)は、図-2で、中間支束 ($r=1, 2, \dots, n-1$) を取り除いた時の仕事連立方程式に相当している。

式(14)あるいは式(16)で、未知数 X_r は未知数 H_p を含んだ形で求まる。この式を式(11)に代入すれば

式(17)のようになる。

$$v(x) = P \left\{ K(x, \xi) - \sum_{r=1}^{n-1} [K(l_i, l_r)] [K(l_i, \xi)] [K(x, l_r)] \right\} + H_p y'' \left\{ \int_0^L K(x, \xi) d\xi - \sum_{r=1}^{n-1} [K(l_i, l_r)] \left[\int_0^L K(l_i, \xi) d\xi \right] \right. \\ \left. \times [K(x, l_r)] \right\} \quad \dots \dots (17)$$

次に、式(17)を式(2)に代入すれば、式(18)のようになる。

$$H_p(\xi) = \frac{Z(\xi)}{N} \dots (18)$$

$$= \tau, \quad Z(\xi) = P \left\{ \int_0^L K(x, \xi) dx - \sum_{r=1}^{n-1} [K(l_r, l_r)]^{-1} \left[\int_0^{l_r} K(x, l_r) dx \right] \right\} \dots (19)$$

$$N = \frac{L_c}{E_c A_c} + (y'')^2 \int_0^L K(x, \xi) d\xi dx - (y'')^2 \sum_{r=1}^{n-1} [K(l_r, l_r)]^{-1} \left[\int_0^{l_r} K(x, l_r) d\xi \right] \left[\int_0^{l_r} K(x, l_r) dx \right] \dots (20)$$

$$\int_0^L K(x, \xi) d\xi = \frac{L^2}{H} \left[\frac{1}{2} \frac{x}{L} (1 - \frac{x}{L}) - \frac{1}{(\mu L)^2} \left\{ 1 - \frac{\cosh \mu (\frac{L}{2} - x)}{\cosh \mu \frac{L}{2}} \right\} \right] \dots (21)$$

$$\int_0^L \int_0^L K(x, \xi) d\xi dx = \frac{L^3}{H} \left\{ \frac{1}{12} - \frac{1}{(\mu L)^2} \left(1 - \frac{\tanh \mu \frac{L}{2}}{\mu \frac{L}{2}} \right) \right\} \dots (22)$$

式(16)と式(18)を式(11)に代入すれば、たわみ $v(x)$ が求まる。

また、曲げモーメント $M(x)$ 、剪断力 $Q(x)$ は、式(23)、式(24)で求まる。

$$M(x) = -EI \cdot v''(x) \dots (23), \quad Q(x) = -EI v'''(x) \dots (24)$$

4. Fourier変換による解法

$$\text{式(1)の両辺に、Fourier Sine変換を施し、} \int_0^L v(x) \sin \frac{k\pi}{L} x dx = V(\frac{k\pi}{L}) \dots (25)$$

$$\text{とする。但し、} k=1, 2, \dots, \text{また、} \alpha = \frac{k\pi}{L}, \beta = EI \alpha^4 + H \alpha^2 \text{ とすれば} \dots (26)$$

$$\text{式(1)の変換は } EI \alpha^4 V(\alpha) + H \alpha^2 V(\alpha) = P \sin \alpha \xi + H_p y'' \frac{Z}{\alpha} + \sum_{r=1}^{n-1} X_r \sin \alpha l_r \dots (27) \text{ となり、}$$

式(27)の逆変換として、未知数 X_r, H_p を含んだ形で $v(x)$ が求まる

$$v(x) = \frac{2}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta} P \sin \alpha \xi \cdot \sin \alpha x + \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{\beta} H_p y'' \frac{Z}{\alpha} \sin \alpha x + \frac{2}{L} \sum_{r=1}^{n-1} X_r \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta} \sin \alpha l_r \cdot \sin \alpha x \right) \dots (28)$$

$$\text{式(12)を用いれば } \sum_{r=1}^{\infty} X_r \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta} \sin \alpha l_r \cdot \sin \alpha l_r \right) = -P \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta} \sin \alpha \xi \sin \alpha l_r - H_p y'' \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{\beta} \frac{Z}{\alpha} \sin \alpha l_r \dots (29)$$

式(29)は、式(14)あるいは式(19)に対応している。

$$\text{ここで } K(x, \xi) = \frac{2}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta} \sin \alpha \xi \cdot \sin \alpha x \dots (30) \text{ とすれば}$$

$$\text{式(28)は } v(x) = P K(x, \xi) + H_p y'' \int_0^L K(x, \xi) d\xi + \sum_{r=1}^{n-1} X_r K(x, l_r) \dots (31) \text{ となり、式(11)と一致する。}$$

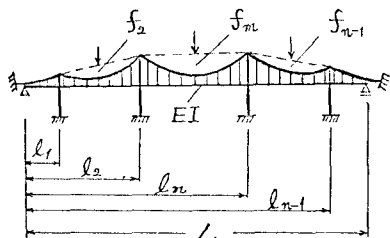
式(30)は、単純桁に引張軸力が作用している時のGreen関数をFourier級数展開したものである。

以下、Green関数 $K(x, \xi)$ を用いれば、たわみ $v(x)$ を求める方法はLaplace変換による解法の場合と全く同様である。

5. 数値計算例

数値計算例としては、現在、計画中の本州四国連絡橋を例にとり、五径間連続吊橋として、表-1のような断面諸元を用いた。

表-1 断面諸元

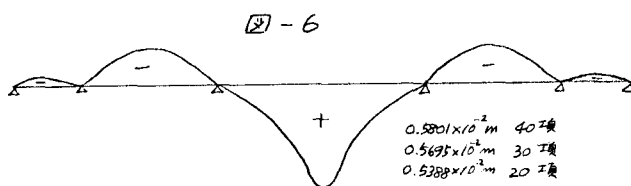
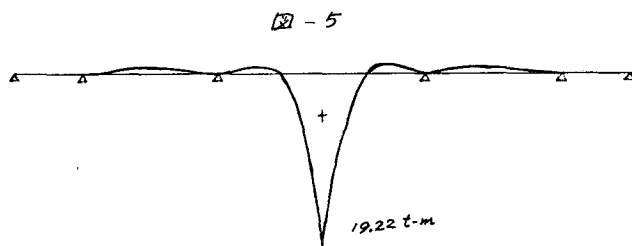
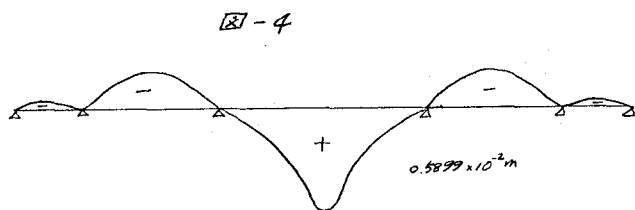


	第1径間	第2径間	第3径間	第4径間	第5径間
l	500 ^m	1000 ^m	1500 ^m	1000 ^m	500 ^m
f	15.152 ^m	60.608 ^m	136.366 ^m	60.608 ^m	15.152 ^m
I	2.543 ^{m⁴}	2.543 ^{m⁴}	2.543 ^{m⁴}	2.543 ^{m⁴}	2.543 ^{m⁴}
$E=2.1 \times 10^7 \text{ t/m}^2, E_c=2.0 \times 10^7 \text{ t/m}^2, A_c=0.7259 \text{ m}^2, H_p=3279 \text{ t}$					

図-4は、Laplace変換によって五径間連続吊橋の中央径間中央点における撓みの影響線を図示したものである。

図-5は、同じくLaplace変換によって五径間連続吊橋の中央径間中央点における曲げモーメントの影響線を図示したものである。

図-6は、Fourier変換によって五径間連続吊橋の中央径間中央点における撓みの影響線を図示したものである。20項までとした場合は $0.5388 \times 10^{-2} \text{ m}$ であり、30項までとした場合は $0.5695 \times 10^{-2} \text{ m}$ であり、40項までとした場合は $0.5801 \times 10^{-2} \text{ m}$ である。また、図-4、図-5は、文献1による方法と全く一致している。



5. おとがき

- 1) ローラー結合の場合の多径間連続吊橋の解法として、文献1による方法と同様に、本解法は有効であることがわかった。
- 2) 本解法は単系桁のGreen関数のみで表示できる。
また、図-1(A)のような塔とケーブルとカテナリ結合 ($N_g=0, N_g$ 考慮) の場合の本解法による方法は別の機会に発表する。

参考文献

- 1) 渡辺昇, 佐藤浩一:「多径間吊橋の弾性理論と撓度理論との比較について」第24回年次学術講演会 I-161
- 2) 佐藤浩一:「多径間吊橋の塔の曲げ剛性が断面力特性に及ぼす影響について」昭和44年度土木学会北海道支部研究発表論文集
- 3) 渡辺昇:「橋の影響線の理論と計算法」現代社
- 4) Hauranek; Steinhart:「Theorie und Berechnung der Stahlbrücken」Springer-Verlag 1958