I-212　つり橋の捩れに関する研究

京都大学工学部　正員　小西一郎
京都大学工学部　正員　白石成人
京都大学工学部　学員　○永田智康

1. まえがき

走行荷重による吊橋の振動について京都大学橋梁研究室では数年にわたって研究を行ってきたが，本研究はその一還として走行荷重による捩れ振動について若干の考察を加えたものである。

2. 基礎方程式

たわみをη，捩れをφで表す場合運動エネルギーTは

$$T = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{3}\int_0^{l_n}\frac{w_n}{g}\left(\frac{\partial \eta_n}{\partial t}\right)^2 dx_n + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{3}\int_0^{l_n} J\left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial t}\right)^2 dx_n \tag{1}$$

ポテンシャルエネルギーVは

$$V = \sum_{n=1}^{3}\int_0^{l_n}\left\{E\cdot C_w\left(\frac{d^2\varphi}{dx_n^2}\right)^2 + EI_v\left(\frac{d^2\eta_n}{dx_n^2}\right)^2\right\}dx_n$$
$$+ \sum_{n=1}^{3}\Big\langle \int_0^{l_n} E\beta b d\left(\frac{d\varphi_n}{dx_n}\right)^2 dx_n + \int_0^{l_n}\Big[H_w\Big\{\left(\frac{d\eta_n}{dx_n}\right)^2 + \frac{b^2}{4}\left(\frac{d\varphi_n}{dx_n}\right)^2\Big\}$$
$$+ H\Big\{\left(\frac{d\eta_n}{dx_n}\right)^2 + \frac{b^2}{4}\left(\frac{d\varphi}{dx_n}\right)^2 + \frac{\eta_n}{\rho}\Big\}$$
$$+ \frac{b}{2}H_t\Big\{\frac{\varphi_n}{\rho} - \varphi_n\frac{d^2\eta_n}{dx_n^2} - \eta_n\frac{d^2\varphi_n}{dx_n^2}\Big\}\Big]dx \Big\rangle \tag{2}$$

ここにnは径間名を表すもので1，3は側径間又は中央径間である。

η_n，φ_nを次のように展開できるものと仮定する。

$$\eta_n = \sum_{i=1}^{\infty} q_{n,i}(t)\cdot\sin\frac{i\pi x_n}{l_n}$$
$$\varphi_n = \sum_{i=1}^{\infty} u_{n,i}(t)\cdot\sin\frac{i\pi x_n}{l_n}$$

これらを(1)，(2)に代入し相互の連成を無視してT，Vを$\dot{\eta}$，η'，$\dot{\varphi}$，φ，φ'，φ''の関数として求めてLagrangeの運動方程式に代入すると捩れについては次の方程式をうる。

$i = 1, 3, 5 \cdots$

$$\ddot{u}_{1,i} + \varepsilon_{1,i}^2 u_{1,i} + \frac{\alpha^2}{i}\left(l_1\sum_{j=1,3,5\cdots}\frac{u_{1,j}+u_{3,j}}{j} + l_2\sum_j\frac{u_{2,j}}{j}\right) = \frac{2R_{1,i}}{J_1 l_1}$$
$$\ddot{u}_{2,i} + \varepsilon_{2,i}^2 u_{2,i} + \frac{\alpha_2^2}{i}\left(l_1\sum\frac{u_{1,j}+u_{3,j}}{j} + l_2\sum\frac{u_{2,j}}{j}\right) = \frac{2R_{2,i}}{J_2 l_2}$$
$$\ddot{u}_{3,i} + \varepsilon_{3,i}^2 u_{3,i} + \frac{\alpha_2^2}{i}\left(l_1\sum\frac{u_{1,j}+u_{3,j}}{j} + l_2\sum\frac{u_{2,j}}{j}\right) = \frac{2R_{3,i}}{J_2 l_2}$$

$i = 2, 4, 6 \cdots$

$$\ddot{u}_{1,i} + \varepsilon_{1,i}^2 u_{1,i} = \frac{2R_{1,i}}{J_1 l_1}$$
$$\ddot{u}_{2,i} + \varepsilon_{2,i}^2 u_{2,i} = \frac{2R_{2,i}}{J_1 l_1}$$

$$\ddot{u}_{3,i} + \varepsilon_{3,i}^2 u_{3,i} = \frac{2}{J_1 l_1} R_{3,i}$$

上の微分方程式の解は第一スパンに荷重のある場合

$i = 1,\ 3,\ 5 \qquad i = 2k-1$

$$u_{1,i} = \sum_{l=1}^{6} V_{k,l} \left(A_l \sin w_l t + B_l \cos w_l t \right) + \frac{2P_l}{J_1 l_1} \frac{\sin i\lambda_1 t}{\varepsilon_{1,i}^2 - i^2\lambda_1^2} - \frac{2P_l}{J_1 l_1} \frac{d^2 l}{i} \sum_{j=1,3,5} \frac{\sin j\lambda_1 t}{J \cdot \Lambda(-j^2\lambda_1^2) \cdot (\varepsilon_{1,i}^2 - j^2\lambda_1^2) \cdot (\varepsilon_{1,j}^2 - j^2\lambda_1^2)}$$

$$u_{2,i} = \sum_{l=1}^{6} V \left(C \sin w_l t + D \cos w_l t \right) - \frac{2P_l}{J_1 l_1} \frac{d_2^2 l}{i} \sum_{j} \frac{\sin j\lambda_1 t}{J \Lambda(-j^2\lambda_1^2) \cdot (\varepsilon_{2,i}^2 - j^2\lambda_1^2)(\varepsilon_{1,j}^2 - j^2\lambda_1^2)}$$

$$u_{3,i} = \sum_{l=1}^{6} V \left(E \sin w_l t + F \cos w_l t \right) - \frac{2P_l}{J_1 l_1} \frac{d_{1}^2 l}{i} \sum_{j} \frac{\sin j\lambda_1 t}{J \Lambda(-j^2\lambda_1^2) \cdot (\varepsilon_{3,i}^2 - j^2\lambda_1^2) \cdot (\varepsilon_{1,j}^2 - j^2\lambda_1^2)}$$

$i = 2,\ 4,\ 6$

$$u_{1,i} = C_1 \sin w_{1,i} t + D_1 \cos w_{1,i} t + \frac{2P_l}{J_1 l} \frac{\sin i\lambda_1 t}{\varepsilon_{1,i}^2 - i^2\lambda_1^2}$$

$$u_{2,i} = C_2 \sin w_{2,i} t + D_2 \cos w_{2,i} t$$

$$u_{3,i} = C_3 \sin w_{3,i} t + D_3 \cos w_{3,i} t$$

荷重が中央径間へ入って後の解も同様に求められる。

上の解で項 $\frac{2P_l}{J_1 l} \frac{\sin i\lambda_1 t}{\varepsilon_{1,i}^2 - i\lambda_1^2}$ は第1径間の解のみに表れることから荷重の存在項である。項 $\frac{2P_l}{J_1 l_1} \frac{d_2^2 l}{i} \sum \frac{\sin j\lambda_1 t}{J_1 \Lambda(-j^2\lambda_1^2) \cdot (\varepsilon_{k,i}^2 - j^2\lambda_1^2)(\varepsilon_{k,j}^2 - j^2\lambda_1^2)}$ などは $i = 1,\ 3,\ 5$ のみに表れることからケーブルを伝わる他径間の影響の伝達項である。

3. あとがき

以上の解を初期条件によって未走定数を決定して計算を行った。計算の結果は当日に発表する。今後の課題としては吊橋各部に働く応力を検討し，安全性について考察してみたい。