I-211　滑車を有するケーブルトラスの解析

法政大学　正員　工博　大地羊三
川田工業　正員　工修　野村国勝
大日本コンサルタント　正員　工修　○中崎俊三

1．まえがき

ケーブルトラス構造としては これまで、ハンガー固定式のものが 多く見られている。 この構造形式の ものは、プレテンション導入法が、下側ケーブルを引張することであり、その際の導入力が、かなり大きなものになること、ハンガー長のわずかな製作誤差により、各々のハンガーに導入される張力が予定していたものより、かなり狂ってくることなど、不利な点があげられる。

次に示される滑車を有するケーブルトラスの場合、小さな引張力で、ケーブルトラス全体に大きなプレテンションが導入されること、ハンガーの製作誤差というものが、あり得ないという大きな利点がある。

本文は、2-1図に示すように、上側ケーブルと下側ケーブルに、滑車を千鳥に配置したものに、一本のロープを通して、それを引張した場合の変形及び張力の計算方法を述べたものである。 しかし、ここでは、張力導入後の活荷重による場合の解析法は、述べていない。 滑車をそのままにした場合の解析は、かなり複雑であろう。 しかし、滑車をプレテンションのみに利用し、その後直ちに、滑車を何らかの方法で、固定（ハンガーロープの移動を許さない）すれば、活荷重による影響は、ハンガー固定式の場合と同様に解析できるであろう。

2．解析方法

2-1図に示すように、千鳥に配置された滑車を一本のハンガーロープを通して、引張力Tで引張した時の上下ケーブルの挙動の計算方法を示す。 上下ケーブルの各々の格点にかかる荷重が解れば、その荷重を変形前のフリーケーブルに載荷することによって、変形及び張力は、算出できる。（フリーケーブルに三次元集中荷重をかけた場合の変形と張力を算出する基本プログラムは、3．で述べる）

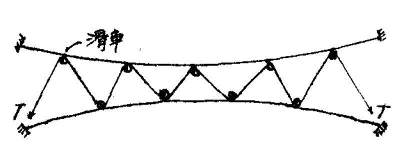


図 2-1

しかし、ここにおいて、問題となるのは、無応力状態から、載荷していると、形状は、刻々と変るので、上下ケーブルの各々の格点にかかる荷重は、それに従って変化していることである。 従って、このような滑車構造の解析法は、荷重を変化させる収束計算となる。

上下ケーブルの格点に作用する荷重は、格点座標から、計算されるから、格点荷重は、ケーブル形状から算出される。 最終的に、締め上った形状を仮定し、それから、荷重を計算し、その荷重を変形前のフリーケーブルに載荷して、変形々状を算出する。 その時、仮定された変形々状と、その形状から、算出された格点荷重を無応力状態のフリーケーブルに載荷して、生じた変形状態が、ある精度内で、一致すれば、この問題は、解けたことになる。

以上の計算の進め方をまとめると、次のようになる。

(1). 変形前の格点座標から、格点荷重を算出する。 (2-2図参照)

(2). (1)の荷重を、変形前のフリーケーブルの格点に載荷し、上下ケーブルの変形を算出する。

(3) (2)による変形々状から、格点荷重を算出し、再び、変形前のフリーケーブルの格点に、載荷して、変形を算出する。 (変形を δ_i とする)

(4) (3)による変形から、(3)と同様の操作をする。 (変形を δ_{i+1} とする)

(5) δ_i と δ_{i+1} が、次式を満足するかどうかを調べる。

$$\delta_{i+1} - \delta_i < \varepsilon \qquad \varepsilon ; \text{許容誤差}$$

(6) もし、(5)で満足されねば、(3)と(4)を繰り返す。

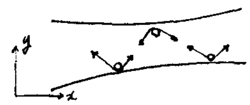


図 2-2

上述の方法による場合の収束性について述べる。
2-3図に示すように、真の形状Dにおけるハンガーロープの傾角θは、仮定できないので、まず、変形前の形状Aから、荷重を算出すると、傾角θ_0は、小さいから、Bのような真の値Dよりも大きな変形を示す。 次に、Bの形状をもとに、荷重を計算すると、傾角は、θよりも大きいから、格点荷重は、小さめとなり、変形は小さく、Cのような形状を示す。 しかし、Cは、変形前の形状Aに載荷されるのであるから、Aよりは、下側に来るはずである。 Cをもとに計算すれば、それによる変形々状は、DとBの間に来るはずである。 即ち、Bは、Aによる結果であるから、Cによる結果は、Bよりも真の値Dに近づくはずである。

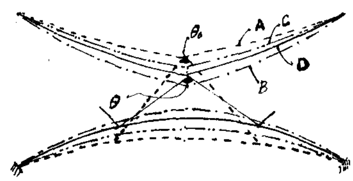


図 2-3

このようにして、繰り返し計算すれば、真の値Dに収束していくであろう。

3. 三次元集中荷重の下のフリーケーブルの解

2.の節で述べた解析法では、フリーケーブルに二次元荷重が作用した時の変形及び張力の求める基本的なサブプログラムが使用された。 ここでは、3-1図に示すように、一般的な三次元集中荷重が作用した時のフリーケーブルの変形及び張力を求める方法を与える。

フリーケーブルの解法は、これまで種々の方法が見られているが、ここでは、O'Brienの方法に似ているが、格点間の分布荷重を無視した格点間が、直線になる場合の方法を示そう。

(1) 左端の部材の張力の成分X1,Y1,Z1を仮定する。

(x,y)は、紙面と同じ平面，(z)は紙面に直角な方向である。 左端の張力Y1,Z1の仮定方法は、梁の反力の計算方法で求まる。 X1の仮定方法は、変形前の格点座標を用いて、反力計算する。 上述の方法で求めた仮定値は、初期値として、充分なものであるようで

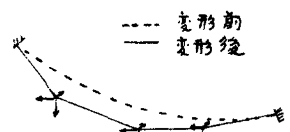


図 3-1

る。

(2). (x_1, y_1, z_1)より、全部材の張力の(x, y, z)成分を求める。

格点での釣り合い条件より、例えば、3-2図に示す(x_2, y_2, z_2)は、(x_1, y_1, z_1)と格点荷重(P_{x1}, P_{y1}, P_{z1})から求まる。

$x_2=-P_{x1}+x_1,\ y_2=-P_{y1}+y_1,\ z_2=-P_{z1}+z_1$

同様にして、全部材の張力は、(x_1, y_1, z_1)と荷重項から求まる。

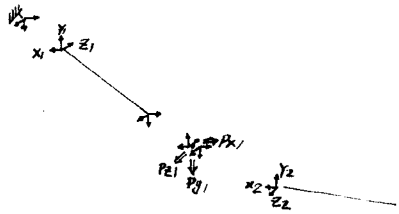


図3-2

(3) 全部材の軸力T_iを求める。

$$T_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}$$

(4) 軸力T_iによる各部材の伸び量Δl_iを計算する。

$$\Delta l_i = \frac{l_{ui}}{EA} \cdot T_i$$

E：ケーブルヤング係数
A：ケーブル断面積
l_{ui}：変形前におけるi番目の部材長

(5) 変形後の部材長l_iを計算する。(図3-3)

$$l_i = l_{ui} + \Delta l_i$$

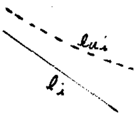


図3-3

(6) l_iのx, y, z方向成分a_i, b_i, c_iを計算する。

3-4図より

$$a_i = \frac{x_i}{T_i} \cdot l_i$$
$$b_i = \frac{y_i}{T_i} \cdot l_i$$
$$c_i = \frac{z_i}{T_i} \cdot l_i$$

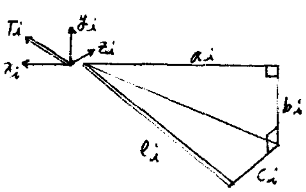


図3-4

(7) 全部材のa_i, b_i, c_i成分を合計し、L, hと比較する。(図3-5)

$$L - \Sigma(a_i) = \varepsilon_{ra} < \varepsilon$$
$$h - \Sigma(b_i) = \varepsilon_{rb} < \varepsilon$$
$$\Sigma(c_i) = \varepsilon_{rc} < \varepsilon$$

ε：許容誤差

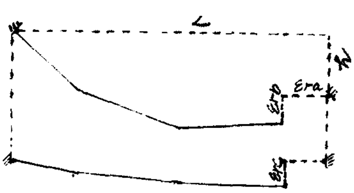


図3-5

上式が満足されれば、収束計算は終りである。

つまり、仮定値(x_1, y_1, z_1)が満足された訳である。

(8) 収束計算が満足されない場合の仮定値x_1, y_1, z_1の修正

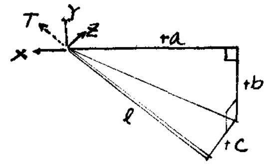
仮定値$x_1^{(i)}, y_1^{(i)}, z_1^{(i)}$の時、誤差が$\varepsilon_{ra}, \varepsilon_{rb}, \varepsilon_{rc}$だったとすると、次の仮定値$x_1^{(i+1)}, y_1^{(i+1)}, z_1^{(i+1)}$は、次のように修正される。但し、修正量を$\Delta x_1^{(i)}, \Delta y_1^{(i)}, \Delta z_1^{(i)}$とする。

$$x_1^{(i+1)} = x_1^{(i)} + \Delta x_1^{(i)},\ y_1^{(i+1)} = y_1^{(i)} + \Delta y_1^{(i)},\ z_1^{(i+1)} = z_1^{(i)} + \Delta z_1^{(i)}$$

として、再び(1)から(7)を繰り返す。

次に、仮定値$(x_1, y_1, z_1)^i$、誤差量$(\varepsilon_{ra}, \varepsilon_{rb}, \varepsilon_{rc})$をもとに、修正量$(\Delta x_1, \Delta y_1, \Delta z_1)^i$を求める。

部材の端部力(x,y,z) とその形状a,b,c との間には、次の関係がある。



$$\frac{Y}{X}=\frac{b}{a} \text{ より } Y=\frac{b}{a}x=a^{-1}bx \quad \cdots\cdots (3\text{-}1)$$

$$\frac{Z}{X}=\frac{c}{a} \text{ より } Z=\frac{c}{a}x=a^{-1}cx \quad \cdots\cdots (3\text{-}2)$$

(3-1), (3-2)を全微分すれば、次式が得られる。

$$(\Delta Y)=-a^{-2}bx(\Delta a)+a^{-1}x(\Delta b)+a^{-1}b(\Delta x) \quad \cdots\cdots (3\text{-}1)'$$

$$(\Delta Z)=-a^{-2}cx(\Delta a)+a^{-1}x(\Delta c)+a^{-1}c(\Delta x) \quad \cdots\cdots (3\text{-}2)'$$

次に、$l'-l=\frac{l}{EA}(T'-T)$ である。 (l',T')；変形後、(l,T)；変形前

$$\text{左辺}=\sqrt{(a+\Delta a)^2+(b+\Delta b)^2+(c+\Delta c)^2}-\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$=\sqrt{a^2+b^2+c^2+2a\Delta a+2b\Delta b+2c\Delta c+\Delta a^2+\Delta b^2+\Delta c^2}-\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\left\{\sqrt{1+\frac{2(a\cdot\Delta a+b\cdot\Delta b+c\cdot\Delta c)+\Delta a^2+\Delta b^2+\Delta c^2}{a^2+b^2+c^2}}-1\right\}$$

$$\ast=\frac{2(a\cdot\Delta a+b\cdot\Delta b+c\cdot\Delta c)+\Delta a^2+\Delta b^2+\Delta c^2}{a^2+b^2+c^2} \text{ とおくと}$$

$$\text{左辺}=l\left\{(1+\ast)^{\frac{1}{2}}-1\right\} \underset{\ast<1 \text{ とおると}}{\doteqdot} l\left\{\left(1+\tfrac{1}{2}\ast\right)-1\right\}=l\cdot\frac{1}{2}\ast$$

$\Delta a^2+\Delta b^2+\Delta c^2<$ negligible

$$=\frac{1}{l}(a\cdot\Delta a+b\cdot\Delta b+c\cdot\Delta c)$$

同様にして

$$\text{右辺}=\frac{l}{EA}\cdot\frac{X\Delta X+Y\cdot\Delta Y+Z\cdot\Delta Z}{T}$$

故に、$a\cdot\Delta a+b\cdot\Delta b+c\cdot\Delta c=\frac{l^2}{EAT}(X\cdot\Delta X+Y\cdot\Delta Y+Z\cdot\Delta Z)$ ……(3-3)

$\Delta a,\Delta b,\Delta c$を(3-1)', (3-2)', (3-3)の連立方程式で解くと

$\Delta a,\Delta b,\Delta c$は、各々、次のように与えられる。

$$\left.\begin{aligned}
\Delta a&=\frac{a}{l^2}\left(\alpha X+\frac{b^2+c^2}{X}\right)(\Delta X)+\frac{a}{l^2}\left(\alpha Y-\frac{ab}{X}\right)(\Delta Y)+\frac{a}{l^2}\left(\alpha Z-\frac{ac}{X}\right)(\Delta Z)\\
\Delta b&=\frac{b}{l^2}\left(\alpha X-\frac{a^2}{X}\right)(\Delta X)+\frac{b}{l^2}\left(\alpha Y+\frac{a(a^2+c^2)}{Xb}\right)(\Delta Y)+\frac{b}{l^2}\left(\alpha Z-\frac{ac}{X}\right)(\Delta Z)\\
\Delta c&=\frac{c}{l^2}\left(\alpha X-\frac{a^2}{X}\right)(\Delta X)+\frac{c}{l^2}\left(\alpha Y-\frac{ab}{X}\right)(\Delta Y)+\frac{c}{l^2}\left(\alpha Z+\frac{a(a^2+b^2)}{Xc}\right)(\Delta Z)
\end{aligned}\right\} \quad \text{但し、} \alpha=\frac{l^2}{EAT}$$

ケーブル右端での計算誤差を$\Sigma a_c, \Sigma b_c, \Sigma c_c$とし、それに対する補正値を$\Delta X_1, \Delta Y_1, \Delta Z_1$とすれば

$$\Sigma a_c=\beta_1\cdot\Delta X_1+\beta_2\cdot\Delta Y_1+\beta_3\cdot\Delta Z_1,\ \Sigma b_c=\beta_4\cdot\Delta X_1+\beta_5\cdot\Delta Y_1+\beta_6\cdot\Delta Z_1,\ \Sigma c_c=\beta_7\cdot\Delta X_1+\beta_8\cdot\Delta Y_1+\beta_9\cdot\Delta Z_1 \quad \cdots\cdots (3\text{-}4)$$

但し

$$\beta_1=\Sigma\frac{a_i}{l_i^2}\left(\alpha_i X_i+\frac{b_i^2+c_i^2}{X_i}\right),\ \beta_2=\Sigma\frac{a_i}{l_i^2}\left(\alpha_i Y_i-\frac{a_i b_i}{X_i}\right),\ \beta_3=\Sigma\frac{a_i}{l_i^2}\left(\alpha_i Z_i-\frac{a_i c_i}{X_i}\right)$$

$$\beta_4=\Sigma\frac{b_i}{l_i^2}\left(\alpha_i X_i-\frac{a_i^2}{X_i}\right),\ \beta_5=\Sigma\frac{b_i}{l_i^2}\left(\alpha_i Y_i+\frac{a_i(a_i^2+c_i^2)}{X_i b_i}\right),\ \beta_6=\Sigma\frac{b_i}{l_i^2}\left(\alpha_i Z_i-\frac{a_i c_i}{X_i}\right)$$

$$\beta_7=\Sigma\frac{c_i}{l_i^2}\left(\alpha_i X_i-\frac{a_i^2}{X_i}\right),\ \beta_8=\Sigma\frac{c_i}{l_i^2}\left(\alpha_i Y_i-\frac{a_i b_i}{X_i}\right),\ \beta_9=\Sigma\frac{c_i}{l_i^2}\left(\alpha_i Z_i+\frac{a_i(a_i^2+b_i^2)}{X_i c_i}\right)$$

$\Sigma a_c, \Sigma b_c, \Sigma c_c$に、計算誤差を代入してやれば 補正値$\Delta X_1, \Delta Y_1, \Delta Z_1$は、求まる。

4. 結び

本文で述べた解析法による計算例は、講演当日、発表するものとする。

なお、本論につき、終始御指導して下さいました、大地先生、野村氏に深く感謝します。