I-210 有限変形還元法によるケーブル解析

本州四国連絡橋公団　正会員　林 有一郎

1　まえがき

有限変形法は変形法から考えるならば構造の初期形状を仮定し断面力と外力の釣合条件を調べ、釣合っていない力を変位に変換して初期形状を修正し、繰返し計算によって順次最終形状に近ずけてゆくものである。この際収束性が問題になるが Newton-Raphson 法によればその収束性が保証される。還元法はある節点における断面力及び変位からなる物理量を節点伝達マトリックス（Punkt Matrix），部材伝達マトリックス（Feld Matrix）を用いて左から右に移してゆき、両端の境界条件によって物理量を決定するものである。筆者はこの２つの方法を結びつけた軸力部材の Feld Matrix，Punkt Matrix を導いたのでケーブルの釣合問題を例にとって報告する。

2　解析の概要

ある外荷重の下で釣合状態にあるトラス構造物の各節点に於ては釣合条件式が成りたつ。即ち空間座標軸を X，Y，Z とし、ij 部材の断面力の i 端に於けるX方向の成分を F_{Xij}，i 節点に加わる外荷重のX方向成分を W_{Xi} とするならば次式が成立する。

$$\sum_j F_{Xij} = W_{Xi} \tag{1}$$

(1) 式を全節点、全方向について集めれば構造物全体の釣合条件式となる。構造物全体の釣合条件式を満足する節点全体の位置ベクトルを $\mathbb{U}$、その系より少しずれた系の位置ベクトルを $\mathbb{U}^\circ$ とする。全断面力は $\mathbb{U}$ の関数であるから

$$d\mathbb{U}^\circ = \mathbb{U} - \mathbb{U}^\circ \tag{2}$$

とおいて(1)の左辺を $\mathbb{U}^\circ$ の点で Taylor 展開すれば次式を得る。

$$\sum_j F_{Xij}(\mathbb{U}_i^\circ, \mathbb{U}_j^\circ) + \sum_j dF_{Xij}(\mathbb{U}_i^\circ, \mathbb{U}_j^\circ) + o(2) = W_{Xi} \tag{3}$$

ここに $\mathbb{U}_i^\circ$ は $\mathbb{U}^\circ$ 系の i 節点の３方向の位置ベクトル、$o(2)$ は $d\mathbb{U}^\circ$ に関する２次の微小項で

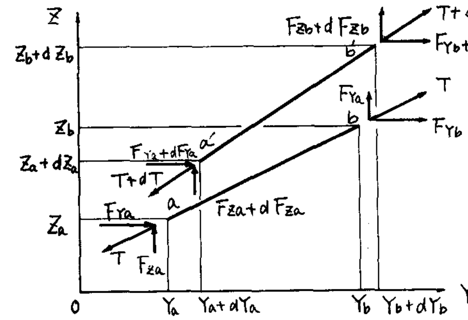
$$dF_{Xij}(\mathbb{U}_i^\circ, \mathbb{U}_j^\circ) = \left[\frac{\partial F_{Xij}}{\partial X_i}\ \frac{\partial F_{Xij}}{\partial Y_i}\ \frac{\partial F_{Xij}}{\partial Z_i}\ \frac{\partial F_{Xij}}{\partial X_j}\ \frac{\partial F_{Xij}}{\partial Y_j}\ \frac{\partial F_{Xij}}{\partial Z_j}\right] \left[dX_i\ dY_i\ dZ_i\ dX_j\ dY_j\ dZ_j\right] \tag{4}$$

である。(3)に於て２次の微小項を無視して変形すれば近似式として次式を得る。

$$\sum_j dF_{Xij}(\mathbb{U}_i^\circ, \mathbb{U}_j^\circ) = W_{Xi} - \sum_j F_{Xij}(\mathbb{U}_i^\circ, \mathbb{U}_j^\circ) \tag{5}$$

(5)は $\mathbb{U}^\circ$ 系から $\mathbb{U}$ 系へ移る時のX方向断面力の１次増分項の i 節点に於ける和が「$\mathbb{U}$ 系の外荷重と $\mathbb{U}^\circ$ 系から決まる断面力との不平衡力のX方向成分」と釣合っていることを示している。(5)と同様な式を全節点、全方向に関して作り、(4)式等の関係を代入すれば通常の変形法の解法に従って節点変位増分が求まる。求めるべき構造物系を $\mathbb{U}$ 系とし、$\mathbb{U}^\circ$ 系を $\mathbb{U}$ 系の前に釣合っていた系、あるいはその系を(4)、(5)式等により節点位置を修正した系にとれば、繰返し同様の関係式を使用することにより $\mathbb{U}$ の位置ベクトルが求まる。以上が Newton-Raphson 法の概要であるが還元法の式を導く為には(4)等を Feld Matrix に，(5)等を Punkt Matrix に変換する。

3　部材変形条件式



図－1　部材位置と断面力

解析は3次元軸力部材に対して行うが、図は2次元にて示す。X，Y，Z軸は右手系にとる。部材にa端，b端の区別をつける。部材の最初の位置を$a\,(X_a, Y_a, Z_a)$，$b\,(X_b, Y_b, Z_b)$とし、微小移動した時の位置を$a'\,(X_a+dX_a, Y_a+dY_a, Z_a+dZ_a)$ $b'\,(X_b+dX_b, Y_b+dY_b, Z_b+dZ_b)$とする。断面力は引張力Tを正とし、各成分はa端では座標軸逆方向b端では座標軸方向を正とする。位置a，b及びa'，b'での断面力成分の記号は図－1を参照して定義する。断面力成分の1次増分と変位増分の関係は全微分の公式から求められ次式の如くになる。

$$dF_{Xa}=\frac{\partial F_{Xa}}{\partial X_a}dX_a+\frac{\partial F_{Xa}}{\partial Y_a}dY_a+\frac{\partial F_{Xa}}{\partial Z_a}dZ_a+\frac{\partial F_{Xa}}{\partial X_b}dX_b+\frac{\partial F_{Xa}}{\partial Y_b}dY_b+\frac{\partial F_{Xa}}{\partial Z_b}dZ_b \tag{6}$$

各偏微分は、部材abの方向余弦を$(l,\ m,\ n)$とする時

$$T=AE\,\frac{L-L_0}{L_0}\qquad (L_0\text{ は }\overline{ab}\text{ の無応力長}) \tag{7}$$

及び、方向余弦と部材長，位置座標との関係式，及び部材長と位置座標との関係式，及び断面力成分と断面力との関係式を使用して求められる。(6)式を各成分に関して作れば次式が導かれる。

$$\begin{bmatrix} dF_{Xa}\\ dF_{Ya}\\ dF_{Za}\\ dF_{Xb}\\ dF_{Yb}\\ dF_{Zb}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbb{M} & -\mathbb{M}\\ -\mathbb{M} & \mathbb{M}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} dX_a\\ dY_a\\ dZ_a\\ dX_b\\ dY_b\\ dZ_b\end{bmatrix} \tag{8}$$

但し

$$f=\frac{AE}{L_0},\qquad g=\frac{T}{L},$$

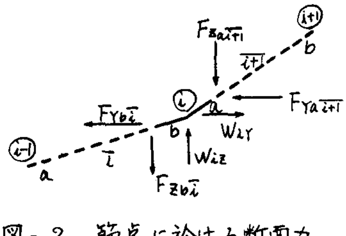
$$\mathbb{M}=\begin{bmatrix} fl^2+g(1-l^2) & flm-glm & fln-gnl\\ flm-glm & fm^2+g(1-m^2) & fmn-gmn\\ fln-gnl & fmn-gmn & fn^2+g(1-n^2)\end{bmatrix}$$

与式の結合関係を変えれば次式が導かれる。

$$\begin{bmatrix} dX_b\\ dY_b\\ dZ_b\\ dF_{Xb}\\ dF_{Yb}\\ dF_{Zb}\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbb{E} & \begin{matrix} -\frac{1}{g}(1-l^2)-\frac{1}{f}l^2 & & (\text{対称})\\ \left(\frac{1}{g}-\frac{1}{f}\right)lm & -\frac{1}{g}(1-m^2)-\frac{1}{f}m^2 & \\ \left(\frac{1}{g}-\frac{1}{f}\right)ln & \left(\frac{1}{g}-\frac{1}{f}\right)mn & -\frac{1}{g}(1-n^2)-\frac{1}{f}n^2\end{matrix} & 0\\ 0 & -\mathbb{E} & \\ & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} dX_a\\ dY_a\\ dZ_a\\ dF_{Xa}\\ dF_{Ya}\\ dF_{Za}\\ 1\end{bmatrix} \tag{9}$$

式中$\mathbb{E}$は単位行列，0は零ベクトル又は零行列である。(9)式の中の変換マトリックスが有限変形還元法に於ける Feld Matrix となる。

4　節点釣合条件式



図－2　節点に於ける断面力

部材がケーブル等のように1列につながっている時図-2の様に部材番号、節点番号をつける。構造物の節点位置が最終釣合状態にない時には例えばY方向の不平衡力f_Yは図を参照して次の様に表わされる。

$$f_{iY} = W_{iY} - F_{Yb\bar{i}} - F_{Ya\overline{i+1}} \qquad (10)$$

断面力増分が不平衡力と釣合っている事により図-3を参照して次式が導かれる。

$$dF_{Yb\bar{i}} + dF_{Ya\overline{i+1}} = f_{iY} \qquad (11)$$

(11)と同様な式を他の２方向に関して作り、節点に於ける変位の適合条件式と組合せれば次式が導かれる。

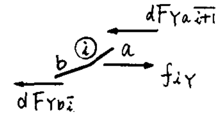


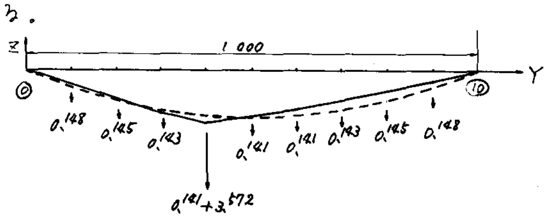
図-３　不平衡力の釣合

$$\begin{bmatrix} dX_a \\ dY_a \\ dZ_a \\ dF_{Xa} \\ dF_{Ya} \\ dF_{Za} \\ 1 \end{bmatrix}_{\overline{i+1}} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & -E & \begin{matrix} f_X \\ f_Y \\ f_Z \end{matrix} \\ & 0 & 1 \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} dX_b \\ dY_b \\ dZ_b \\ dF_{Xb} \\ dF_{Yb} \\ dF_{Zb} \\ 1 \end{bmatrix}_{\bar{i}} \qquad (12)$$

(12)式が有限変形還元法における Punkt Matrix となる。解析の方法は通常の還元法と同一である。即ち、各部材、各節点の Feld Matrix , Punkt Matrix を順次乗じていって右端の物理量を左端の物理量で表わし、右端の境界条件を用いて左端の未知物理量を決定する。これによって総ての点での物理量が分るから　それの変位増分によって前の位置を修正する。修正された位置座標を用いて同様な操作を繰返せば最終の釣合形状、断面力が求められる。

5　数値計算例

本方法を文献①に与えられているケーブルの釣合問題に適用した結果、凡そ９回の繰返しで収束している。



無応力長

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
106.36	103.82	101.93	100.68	100.05	100.05	100.68	101.93	103.82	106.36

A = 0.85　　E = 8482.1

不平衡力の２乗和

繰返し回数	自重のみ	1	3	6	9
$\Sigma f_Y^2 + \Sigma f_Z^2$	12.8	1.45×10^7	2.39×10^5	4.48×10^5	21.9

自重のみでの位置

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
Y	100	200	300	400	500	600	700	800	900
−Z	36.3	64.3	84.175	96.05	100.	96.05	84.175	64.3	36.3

９回目の位置

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
Y	102.04	201.99	297.52	397.19	496.37	595.29	694.23	794.27	896.06
−Z	30.51	59.08	89.18	114.4	99.93	84.02	64.73	44.52	23.23

数値計算に際して角岡正晉氏より御援助戴いた事を厚く感謝致します。

参考文献

① "Theoretical Analysis of Suspension Bridges", by S. A. Saafan, ASCE, Vol. 92, No. ST4, August, 1966,

② "Numerical Solution of Nonlinear Structures", Discussions by Semih S. Tezcan and Prem Krishna, ASCE, Vol. 94, No. ST6, June 1968