

九州大学 工学部 正員 山崎徳也

〃 〃 〃 〇横田 漢

1. 緒言

構造物と地盤の相互作用は土木構造物の動的解析において重要な問題であり、数多くの研究があるがこれを大別すれば次の二様に分類されるかと思う。その一つはいわゆる複素剛性(地盤変形係数)を求めんとするものであり、この分野の研究として地盤の表面に構造物と想定した場合を対象としたものに Reissner¹⁾をはじめとして鳥海²⁾, Bycroft³⁾など多くあり、さらに近年は地盤中に構造物と想定した研究も見受けられる。⁴⁾

他の一つは、地盤が何らかの外乱を受ける場合の波動伝播機構そのものを主たる研究対象とするもので、外乱としては地震の他、近年問題視されている超音速大型機による衝撃波などが考えられ、これらが地盤上あるいは地盤中の構造物にいかなる影響を及ぼすかということとは重大な問題であろう。この種の研究は、Lamb⁵⁾が1904年に半無限弾性体の表面あるいは内部に点加振が作用すると主に生ずるような乱を論じて以来、多くの人々の関心を集め、今日なお盛んに行われている。⁶⁾

以上の研究は「いずれも一層地盤を対象としたものが大部分であり、二層地盤あるいは道路舗装や微視化した地上構造物のごとく地盤上に板があるとみなせる場合の研究は余り見受けられない。そこで著者らは地盤上に板がある場合を対象として、かかる系の波動伝播および複素剛性の解明を図り、まずその基礎研究として板に線荷重が周期的に作用する場合を取り上げ、地盤を半無限弾性体とみなし Lamb の解を拡張して板の波動伝播機構を解析したものである。

2. 解法

1) 基礎方程式 図-1に示すごとく板の中立面を

$z=0$ とする直角座標(x, y, z)を導入し、地盤の変位をそれぞれ(u, v, w)とする。しかもと主、変形は平面歪状態とみなせるゆえ、板の振動は次式にて表わされる。

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_p}{\partial x^2} + \frac{\rho_1 H}{N} \frac{\partial^2 \bar{w}_p}{\partial t^2} = \frac{p(x,t) - \bar{q}(x,t)}{N} \quad (1)$$

ここに $\bar{w}_p$: 板のたわみ, N : 板剛度 ρ_1 : 板の密度, H : 板厚 $\bar{q}(x,t)$: 地盤反力 $p(x,t) = p \delta(x) e^{i\omega t}$ $\delta(x)$: Dirac's delta functionいま、線荷重 $p(x,t)$ にフーリエ変換を施せば次式を得る。

$$p(x,t) = p \delta(x) e^{i\omega t} = \frac{p e^{i\omega t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dk \quad (2)$$

板および地盤は定常運動を行っているとは定し、式(1)に

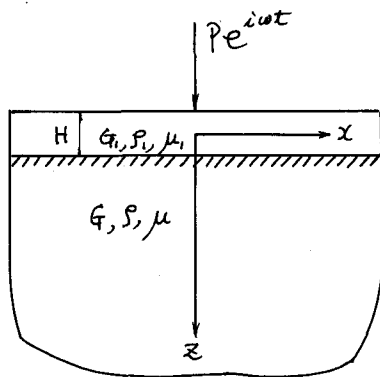


図-1

$\bar{w}_p = w_p e^{i\omega t}$, $\bar{g}(x, t) = g(x) e^{i\omega t}$ および $p(x, t) = \frac{P}{2\pi} e^{-ikx} e^{i\omega t}$
を代入すれば次式を得る。

$$-\frac{\partial^2 w_p}{\partial x^2} - \frac{gH}{N} \omega^2 w_p = \frac{1}{N} \left(\frac{P}{2\pi} e^{-ikx} - g\omega \right) \quad (3)$$

式(3)を解き、 x に関して $-\infty$ から ∞ まで積分を行えば所定の線荷重に対する解がえられることとなる。

他方、地盤の変位 u , w をポテンシャル函数 Φ , Ψ を用いて次式のごとく仮定する。

$$(u, w) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \quad (4)$$

しかるとし、地盤の波動は次式にて表わされる。

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{d^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \Psi = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (5)$$

ここに $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2$, $d = \sqrt{(\lambda + 2G)/S}$, $\beta = \sqrt{G/S}$, λ, G : Laméの定数
また、 $\bar{\Phi}, \bar{\Psi}$ は

$$\bar{\tau}_{zx} = G \left(2 \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial z^2} \right), \quad \bar{\sigma}_z = \lambda \nabla^2 \bar{\Phi} + 2G \left(\frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial x \partial z} \right) \quad (6-1, 2)$$

いま、 $\bar{\Phi}$, $\bar{\Psi}$ を次式にて与える。

$$\bar{\Phi} = A e^{-\gamma \bar{z} - ikx + i\omega t}, \quad \bar{\Psi} = B e^{-\gamma \bar{z} - ikx + i\omega t}, \quad \bar{z} = z - H/2 \quad (7)$$

式(7)を式(5)に代入すれば $\gamma^2 = k^2 - k_d^2$, $\gamma'^2 = k^2 - k_\beta^2$, $k_d = \omega/d$, $k_\beta = \omega/\beta$ (8)
結局、式(8)が満足される限り、式(7)は式(5)の解となる。

なお、無限遠では $\bar{\Phi}$ の変位と応力は有限であり、かつ荷重の作用面から十分離れた点において
はじょう乱は外向きの波から成るといふ、いわゆる無限遠の条件より、 γ, γ' は正の実数かあるいは
 $\pm$ の虚数を意味する。

ii) 板のたわみ w_p 板と地盤との接触面 ($z = H/2$) において次のごとく連続条件を考へ
る。すなわち $w = \bar{w}_p$, $\bar{\sigma}_z + \bar{g}(x, t) = 0$, $\bar{\tau}_{zx} = 0$ (9-1, 2, 3)

式(9-3), (6-1)より直ちに $B = \frac{\gamma \cdot k_\beta^2 e^{-ikx}}{2k^2 - k_\beta^2} A$ (10)

式(9-1), (4) および (10)より $w_p = \frac{\gamma \cdot k_\beta^2 e^{-ikx}}{2k^2 - k_\beta^2} A$ (11)

式(9-2), (6-2)および式(10)より

$$-g(x) = \frac{G \cdot R(k)}{2k^2 - k_\beta^2} e^{-ikx} A \quad R(k) = (2k^2 - k_\beta^2)^2 - 4k^2 \gamma \gamma' \quad (\equiv \text{Rayleigh 函数}) \quad (12)$$

式(11), (12)を式(3)に代入し A を求めたうえで、 w_p を算出すれば結局次式がえられる。

$$w_p = \frac{P}{2\pi N} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{H}(k) dk, \quad \bar{H}(k) = \frac{\gamma \cdot k_\beta^2 e^{-ikx}}{\gamma \cdot k_\beta^2 \cdot k^2 - \frac{gH}{N} \omega^2 \gamma \cdot k_\beta - \frac{G}{N} R(k)} \quad (13)$$

3. 数値計算と考察

式(13)を無次元化すれば

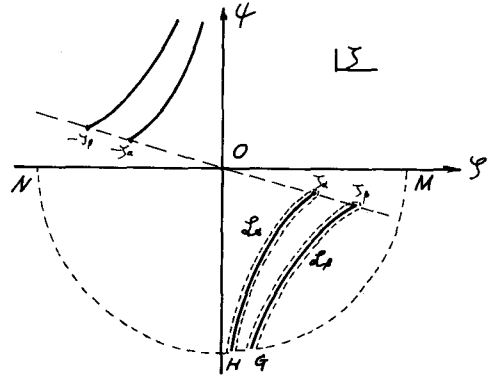
$$W_p = \frac{PH^2}{2\pi N} \int_{-\infty}^{\infty} F(\psi) d\psi, \quad F(\psi) = \frac{\nu}{K(\psi)} e^{-i k_p \psi} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \therefore K(\psi) &= \nu \cdot \varepsilon^2 \psi^4 - 6\nu(1-\mu_1) \frac{\bar{\nu}}{\bar{q}} \varepsilon - \frac{6(1-\mu_1)}{\bar{q}} R(\psi), \quad \nu = (\psi^2 - \gamma^2)^{\frac{1}{2}} \\ \nu' &= (\psi^2 - 1)^{\frac{1}{2}}, \quad R(\psi) = (2\psi^2 - 1)^2 - 4\psi^2 \nu \nu', \quad \bar{\nu} = k_1/k_p, \quad \gamma = k_2/k_p \\ \bar{q} &= q_1/q, \quad \bar{\nu} = \nu/\nu_1, \quad \varepsilon = H \cdot k_p = H \omega \sqrt{\nu/q} \end{aligned}$$

1) 積分方法 種々の ε の値に対して式(14)の積分を行うに当り、 W_p は当然 ψ 軸に関して対称となるゆえ、 $\psi > 0$ なる範囲で考えれば十分である。

式(14)の被積分函数 $F(\psi)$ は後述のごとく極を有しており、これを直接積分することは極めて困難であり、ここでは ψ を複素変数 $z = \psi + i\eta$ と置きかえて複素積分を行うことにする。複素積分を用いて式(14)の積分を行う際に問題となるのは、まず $F(z)$ が分枝点 $(\pm 1, 0)$, $(\pm i, 0)$ を持っており、従って正則一価函数に直すために複素平面上にいくつもの cut (Branch line) を導入するかということ、次いで無限遠の条件を満足するように多価函数 ν, ν' の分枝を選ばなければならないことである。

ここでは、これらの満たす積分方法として Ewing²⁾ が行なった次の手法を用いる。すなわち、まず分枝点 $(\pm 1, 0)$, $(\pm i, 0)$ を複素数値 $\pm z_1, \pm z_2$ に置きかえ、 $\text{Re } z = 0$, $\text{Re } z' = 0$ という cut を導入する。この状態で図-2に示すごとく積分路に沿って Cauchy の定理を適用する。この際、 ν, ν' の分枝は分枝点の近傍において $\text{Re } z \geq 0$, $\text{Re } z' > 0$ を満足するようなものを選ぶ。しかるのち、 $\pm z_1, \pm z_2$ を実軸上に戻す極限値として式(14)の積分値をうる。



以上より

$$\oint F(z) dz = \int_M^N + \int_N^H + \int_H^G + \int_G^P + \int_P^M = 2\pi i \sum \text{Res}$$

ここで $M, N \rightarrow \infty$ とすれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\psi) d\psi = -2\pi i \sum \text{Res} + \int_{z_1}^{z_2} F(z) dz + \int_{z_3}^{z_4} F(z) dz \quad (15)$$

結局、式(14)は積分路内にある極における留数の総和と cut に沿った積分 (Branch line integral) の和で与えられることになる。

ii) 留数 $F(z)$ は図-2に示す積分路内において3つの極を有しており、いま $\mu_1 = 4 = 1/4$, $q = 8$, $\bar{\nu} = 1.44$ の比較的小さい値を対象として数値計算を行なった結果を表-1に示す。これらの極に対する留数の結果のみを記せば次式のごとくである。

$$\text{Res}[F(z); z_1] = e^{-k_p z} A_1(z_1) e^{k_p z}$$

$$\text{Res}[\Pi(s); s_2] = e^{k_2 x} (-\overline{A_1(s_2)}) e^{-i k_2 x} \quad (16)$$

$$\text{Res}[\Pi(s); s_3] = B_1(k) e^{-i k_3 x}$$

なお、 $A_1(s_2)$ 、 $B_1(k)$ の式形は紙面の都合上、省略する。

iii) Branch line integral $\Pi(s)$ の函数形状が煩雑なため cut に沿って積分を厳密に行うことは困難であるゆえ、Ewing と同様、 x の大なる対における近似式を求めれば結局、次式がえられる。

$$\int_{\text{cut}} = C_1 (x k_2)^{-\frac{1}{2}} e^{-i k_2 x}, \int_{\text{cut}} = D_1 (x k_3)^{-\frac{1}{2}} e^{-i k_3 x} \quad (17)$$

$$C_1 = \frac{g}{6(1-\mu_1)} \sqrt{2\pi} i \frac{r^2 e^{-i \frac{\pi}{4}}}{(2r^2 - 1)^2}$$

$$D_1 = \frac{6(1-\mu_1)}{g} 4\sqrt{2\pi} i \frac{(1-r^2)^{\frac{1}{2}} e^{-i \frac{\pi}{4}}}{\left\{ (1-r^2)^{\frac{1}{2}} \varepsilon^3 - 6 \frac{P}{g} (1-\mu_1) (1-r^2)^{\frac{1}{2}} \varepsilon - 6 \frac{1-\mu_1}{g} \right\}^2}$$

以上、式(14)、(15)、(16)および(17)より板のたわみの伝播機構は次式にて表わされる。

$$\begin{aligned} \overline{w}_p = w_p e^{i\omega t} = & -\frac{P \cdot H^3}{N} i B_1 \exp\left[i\omega\left(t - \frac{k}{\beta} x\right)\right] \\ & - \frac{P \cdot H^3}{N} i e^{-k_2 x} \left\{ A_1 \exp\left[i\omega\left(t + \frac{\varepsilon}{\beta} x\right)\right] - \overline{A}_1 \exp\left[i\omega\left(t - \frac{\varepsilon}{\beta} x\right)\right] \right\} \\ & + \frac{P \cdot H^3}{2\pi N} \left\{ C_1 (x k_2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[i\omega\left(t - \frac{x}{\alpha}\right)\right] + D_1 (x k_3)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[i\omega\left(t - \frac{x}{\beta}\right)\right] \right\} \quad (18) \end{aligned}$$

式(18)の第1項は Rayleigh 波に相当するもので、 x に無関係な一定の振幅を有し、かつ表-1に示す ε と x に対応して β/k の速さで荷重集から遠ざかって伝播する表面波を表わし、第2項は x が増大するにつれて指数函数的に減少する振幅をもち、かつ互に反対方向に同一の速度 β/ε で伝播する、いわゆる定在波を表わしている。第3項は半無限弾性体における縦波と横波の伝播速度の α および β に等しい伝播速度をもつ体波を表わしており、 x の大まい所ではそれぞれ $(x k_2)^{-\frac{1}{2}}$ および $(x k_3)^{-\frac{1}{2}}$ の割合で減少する振幅を有してゐる = となることが明白となった。

(参考文献)

- 1) Reissner; "Stationäre axialsymmetrische, durch eine schüttelnde Masse erregte Schwingungen eines homogen elastischen (Halbraumes)", Ingenieur-Archiv, 7, 1926
- 2) I. Toriumi; "Vibration in Foundation of Machines", Technical Report of Osaka University, 5, No. 146
- 3) R.N. Arnold, G.N. Bycroft and G.W. Warburton; "Forced Vibration of a Body on an Infinite Elastic Solid" J. Appl. Mech., 22, No. 3, Sep, 1955
- 4) 例11は 後藤尚男, 板吉卓; "弾性地盤中にある基礎構造物の地震応答特性", 工学会論文報告集, No. 177, 1970. 5
- 5) H. Lamb; "On the propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid"; Phil. Trans. Roy. Soc. A. vol. 203, 1904
- 6) 例12は D.C. Gakhekin; "Transient Excitation of an Elastic (Half) Space by a point Load Traveling on the Surface", J. Appl. Mech., Sep. 1967
- 7) W. M. Ewing, W. S. Jandetzky and F. Press; "Elastic Waves in Layered Media" Mc.Graw-Hill Book Co., 1957

表-1

$s_1 = \varepsilon + i\eta, s_2 = -\overline{s}_1, s_3 = k$			
ε	ξ	η	k
0.1	4.4935	-2.8929	1.0545
0.2	2.1761	-3.9871	1.0949
0.3	1.3808	-2.7094	1.1249
0.4	0.9756	-2.0905	1.1362
0.5	0.7338	-1.7321	1.1278
0.6	0.5767	-1.4975	1.1050
0.7	0.4682	-1.3360	1.0745
0.8	0.3895	-1.2140	1.0411
0.9	0.3301	-1.1119	1.0095
1.0	0.2839	-1.0428	0.9951