I-206　土中構造物の振動解析

岐阜大学工学部　正員　井上　肇
学生員　久保田顕一郎

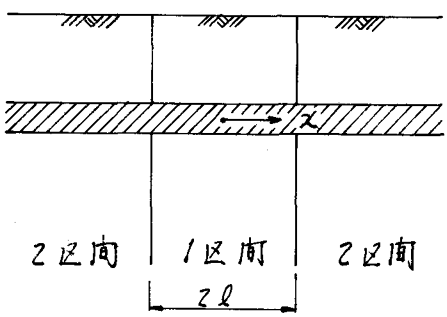
1．まえがき

従来，地下構造物の地震時の解析において，横断方向には地震時の土圧を考慮しているが，長手方向では別段考慮が払われていない。地質が均一であれば長手方向の地震時の影響はあまりないが，不均一のとき，たとえば断層，隆起等の地殻変動によって生成された大幅な異質の媒質中を地下構築物が貫通するとき問題が生じてくる。このような地中構築物の長手方向の振動特性を究明するために，埋設個所が比較的浅い場合，近似解法として一次元弾性床上にある無限梁に振動が作用したときの振動数および振動形態を求めた。

2．基礎方程式

曲げ剛さが一定のときの弾性床上の梁の微分方程式に正規型の振動を考えて，正弦的時間変化による正規座標$(A\sin nt + B\cos nt)$と正規関数Xとの積でまを示すと振動時における梁のたわみ曲率が小さい場合における直線梁の微分方程式は

$$\frac{\partial^4 X}{\partial x^4} - \lambda^4 X = 0 \text{ ----(1)} \qquad \lambda^4 = (n^2 w - K)/EI$$



図－1

上式でwは上載荷重，Kは地盤反力係数である。
(1)式の微分方程式の一般解はつぎのようになる。

$n^2 w > K$のとき　$X = C_{i1}\sin\lambda_i x + C_{i2}\cos\lambda_i x + C_{i3}EXP\{\lambda_i x\} + C_{i4}EXP\{\lambda_i x\}$ --------(2)

$n^2 w < K$のとき　$X = EXP\{\lambda_i x\}(C_{i1}\sin\lambda_i x + C_{i2}\cos\lambda_i x) + EXP\{-\lambda_i x\}(C_{i3}\sin\lambda_i x + C_{i4}\cos\lambda_i x)$ -----(3)

(2)，(3)式を$x=0$，$x\to\infty$の境界条件と異種媒体の境界$x=\ell$における連続条件で解く。
各々の場合の振動数方程式は次式を得る。但し$a = \lambda_2/\lambda_1$

$n^2 w > K$のとき

$$(a\cdot\sin\lambda_1\ell + \cos\lambda_1\ell)(a\cdot\cosh\lambda_1\ell + \sinh\lambda_1\ell) + (a\cdot\cos\lambda_1\ell - \sin\lambda_1\ell)(a\cdot\sinh\lambda_1\ell + \cosh\lambda_1\ell) = 0 \text{ --(4)}$$

$n^2 w < K$のとき

$$(A3\times A2 - A1\times A4) = 0 \qquad \text{-------(5)}$$

$$A1 = \{(a^2+1)\cdot\alpha + 2\beta a\}\cos\lambda_1\ell\cos\lambda_2\ell - (a^2-1)\cdot\alpha\cdot\cos\lambda_1\ell\sin\lambda_1\ell + (a^2-1)\cdot\beta\sin\lambda_1\ell\cos\lambda_1\ell - \{(a^2-1)\cdot\beta + 2a^3\cdot\alpha\}\sin\lambda_1\ell\sin\lambda_2\ell$$

$$A2 = (a^2-1)\cdot\alpha\cdot\cos\lambda_1\ell\cos\lambda_2\ell - \{(a^2+1)\cdot\alpha + 2a^3\cdot\beta\}\cos\lambda_1\ell\sin\lambda_2\ell - \{(a^2+1)\cdot\beta + 2\cdot\alpha\cdot a\}\sin\lambda_1\ell\cos\lambda_2\ell + (a^2-1)\cdot\beta\cdot\sin\lambda_1\ell\sin\lambda_2\ell$$

$$A3 = (a\cdot\beta + a^2\cdot\alpha)\cos\lambda_1\ell\cos\lambda_2\ell - (a\cdot\beta + \alpha)\cos\lambda_1\ell\sin\lambda_2\ell + a^2(a\cdot\alpha + \beta)\sin\lambda_1\ell\cos\lambda_2\ell + (\beta + a^3\cdot\alpha)\sin\lambda_1\ell\sin\lambda_2\ell$$

$$A4 = a^2(a\cdot\beta + \alpha)\cos\lambda_1\ell\cos\lambda_2\ell + (\alpha + a^3\cdot\beta)\cos\lambda_1\ell\sin\lambda_2\ell - (a\cdot\alpha + a^2\cdot\beta)\sin\lambda_1\ell\cos\lambda_2\ell + (a\cdot\alpha + \beta)\sin\lambda_1\ell\sin\lambda_2\ell$$

$$\alpha = 2\cdot\sinh\lambda_1\ell \qquad \beta = 2\cdot\cosh\lambda_1\ell \qquad \gamma = \cosh\lambda_2\ell - \sinh\lambda_2\ell$$

正規関数Xは次のようになる。

$\pi^2\omega > K$ のとき

1辺間 $$X = C\left\{\cos\lambda_1 x + \frac{a\cdot\sin\lambda_1 l + \cos\lambda_1 l}{a\cdot\sinh\lambda_1 l + \cosh\lambda_1 l}\cosh\lambda_1 x\right\} \tag{6}$$

2辺間 $$X = C\left\{\frac{2\cosh\lambda_1 l}{(1+a^2)(\cosh\lambda_2 l - \sinh\lambda_2 l)}\cdot\frac{\sinh\lambda_1 l - a\cos\lambda_1 l}{a\cdot\cosh\lambda_1 l + \sinh\lambda_1 l}\cdot(\cosh\lambda_2 x - \sin\lambda_2 x)\right\} \tag{7}$$

$\pi^2\omega < K$ のとき

1辺間 $X = C(\sinh\lambda_1 l\cdot\sin\lambda_1 x - \cosh\lambda_1 l\cos\lambda_1 x\cdot S1)$

$S1 = A1 / A2$

2辺間 $X = C(\sin\lambda_2 x - S2\cdot\cos\lambda_2 x)\cdot(\cosh\lambda_2 x - \sin\lambda_2 x)\cdot S3$

$S2 = (B1 + B2) / (B2 + B4)$

$B1 = 2\gamma(\alpha^2\beta\cos^3\lambda_1 l\sin\lambda_2 l + a^2\cdot\alpha^3\cdot\sin\lambda_1 l\cos^2\lambda_1 l\cos\lambda_2 l + \beta^3\sin^2\lambda_1 l\cos\lambda_1 l\sin\lambda_2 l + a^2\cdot\alpha\cdot\beta^2\cdot\sin^3\lambda_1 l\cos\lambda_2 l)$

$B2 = (a^3+1)\cdot\alpha\cdot\beta^2\cos^3\lambda_1 l\sin\lambda_2 l + (a^3+1)\cdot\beta^3\cdot\cos^2\lambda_1 l\sin\lambda_1 l\cos\lambda_2 l + (a^3+1)\cdot\alpha^3\cdot\sin^2\lambda_1 l\cos\lambda_1 l\sin\lambda_2 l + (a^3+1)\cdot\alpha^2\cdot\beta\cdot\sin^3\lambda_1 l\cos\lambda_2 l$
$\quad + (a^3-1)(\alpha\cdot\beta^2\cos^3\lambda_1 l\cos\lambda_2 l + \beta^3\sin\lambda_1 l\cos^2\lambda_1 l\cos\lambda_2 l + \alpha^3\cos\lambda_1 l\sin^2\lambda_1 l\cos\lambda_2 l + \alpha^2\cdot\beta\sin^3\lambda_1 l\sin\lambda_2 l)$

$B3 = 2\gamma(\alpha^2\beta\cdot\cos^3\lambda_1 l\cos\lambda_2 l - a^2\cdot\alpha^3\sin\lambda_1 l\cos^2\lambda_1 l\sin\lambda_2 l + \beta^3\cos\lambda_1 l\sin^2\lambda_1 l\cos\lambda_2 l - a^2\cdot\alpha\cdot\beta^2\sin^3\lambda_1 l\sin\lambda_2 l$

$B4 = (a^3+1)(\alpha\cdot\beta^2\cos^3\lambda_1 l\cos\lambda_2 l - \beta^3\sin\lambda_1 l\cos^2\lambda_1 l\sin\lambda_2 l + \alpha^3\cos\lambda_1 l\sin^2\lambda_1 l\cos\lambda_2 l - \alpha^2\cdot\beta\sin^3\lambda_1 l\sin\lambda_2 l)$
$\quad + (a^3-1)(-\alpha\beta^2\cos^3\lambda_1 l\sin\lambda_2 l + \beta^3\sin\lambda_1 l\sin\lambda_2 l\cos^2\lambda_1 l - \alpha^3\cos\lambda_1 l\sin^2\lambda_1 l\cos\lambda_2 l + \alpha^2\beta\sin^3\lambda_1 l\cos\lambda_2 l)$

$S3 = (E1\times F2 - F1\times E2) / (E3\times F2 - F3\times E2)$

$E1 = a^2\cdot\alpha\cdot\sin\lambda_1 l\cdot\sin\lambda_2 l - \beta\cdot\cos\lambda_1 l\cos\lambda_2 l$

$E2 = a^2\cdot\beta\cdot\cos\lambda_1 l\ \sin\lambda_2 l + \alpha\cdot\sin\lambda_1 l\cos\lambda_2 l$

$E3 = a^2\cdot\gamma$

$F1 = (a\cdot\alpha + \beta)\sin\lambda_1 l\cos\lambda_2 l + a\cdot\alpha\sin\lambda_1 l\sin\lambda_2 l + \alpha\cos\lambda_1 l\cos\lambda_2 l$

$F2 = (\beta\cdot a + \alpha)\cos\lambda_1 l\cos\lambda_2 l + a\cdot\beta\cdot\cos\lambda_1 l\sin\lambda_2 l - \beta\sin\lambda_1 l\cos\lambda_2 l$

$F3 = a\cdot\gamma$

3. 数値計算例

図-1に示す梁の5次までの固有振動数を算定し係数比 $a = 0.5$ $\pi^2\omega > K$ のときの振動形態を図示した。各々の係数比の計算結果は当日にゆずる。

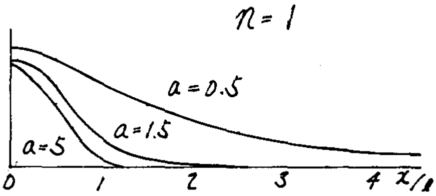


図-2

n	固有値λ
1	1.220
2	4.391
3	7.532
4	10.674
5	13.815

表-1

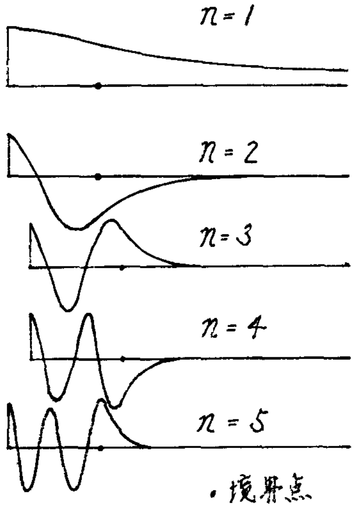


図-3