

1 まえがき 地表面上の構造物の振動特性については、これより数多くの理論的実験的研究が報告されてきた。このような工学上の問題は、地震学上という加振以外の点での振動の伝播機構の興味とは異なり、加振点とそのごく近傍の点の応答を解析の対象としなければならぬので、境界条件のとり方に大きな困難を含んでいる。厳密には構造物と地表面との接触面においては変位で、その他の点においては応力で与えねばならない混合境界値問題となるが、通常はこの困難さをさけるため接触面での応力分布を適当に与えて、地表面での境界条件をすべて応力で統一してきた。構造物の断面形状は解析の都合上円形が多かったが、最近では矩形の場合にも拡張されてきている<sup>1)</sup>。これらの研究の多くは解析の最終結果に無限積分を含んでいるが、田治見は地表面上に静的な実荷重を加えたときの任意点での変位の厳密解と動的な場合に拡張し、かかる問題の取扱いを容易ならしめた<sup>2)</sup>。

そこで回転振動に限ってみると、これらの研究の対象がほとんどすべて構造物断面の主軸に沿った振動であったが、断面が円形以外のものに任意方向から外力が作用する場合に適用できない。このような場合、断面形状の差が応答の方向に決定的な要素になるであろう。本研究は楕円断面の構造物が地表面上に載っていて、これが任意方向よりモーメントを与えられたときの応答の方向と、その動特性を振動アドミッタンス（ばね剛性の逆数）で検討したものである。なお回転角については、平均値による方法などもあるが、ここでは構造物底部の地盤の傾斜角とする田治見の定義によった。

## 2 任意方向の外力に対する構造物の回転振動の方向性と振動アドミッタンス

半無限地盤の表面上の0点より距離 $r$ だけ離れたA点に鉛直実荷重 $Pe^{i\omega t}$ が作用したとき、自由表面で応力0の条件を入れると0点の鉛直変位 $w$ は

$$w = \frac{1}{2\pi G} Pe^{i\omega t} \frac{e^{-ikr}}{r} \quad \text{----- (1)}$$

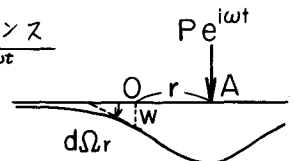


図-1 点加振による0点の応答

で与えられる<sup>3)</sup>。ここに $G$ は地盤のせん断弾性係数、 $k_r = \omega/V_s$ は波数、 $V_s$ は横波の伝播速度である。式(1)は実荷重 $Pe^{i\omega t}$ による振動の伝播を球面波表示したもので、田治見が提案した式(7)の $k_1$ と式(1)の $k_r$ の1.33倍すれば一致することが分る。かくして0点での地盤の傾斜角 $d\Omega_r$ は式(1)を用いて次式で与えられる。

$$d\Omega_r = \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{-Pe^{i\omega t}}{2\pi G} \frac{(1+ik_r r)}{r^2} e^{-ik_r r} \quad \text{----- (2)}$$

この回転角があまり小さくないときは、直線 $\overline{OA}$ から角 $\theta$ だけ水平にふった方向での回転角 $d\Omega$ は

$$d\Omega = \cos\theta \cdot d\Omega_r = -\frac{Pe^{i\omega t}}{2\pi G} \frac{\cos\theta (1+ik_r r)}{r^2} e^{-ik_r r} \quad \text{----- (3)}$$

そこで図-2のような楕円断面をした剛な構造物が地表面上に載っていて、これが任意方向（ $x$ 軸より $\theta_0$ だけ回転した方向）にモーメント $M$ を受ける場合を考える。このとき構造物は地盤の鉛直反力の不均衡により $\theta = \theta_0$ なる方向に回転しないので、ある適当な釣合位置 $\theta = \theta_0^*$ なる方向に求めることになる。すなわち、図-2で見ると構造物は $y$ 軸まわりに回転するとすると、この応答方向 $\theta = \theta_0^*$ は $y$ 軸と直角方

同であるφ軸まわりの回転角が0となるようなθの値と定義される。  
そこで回転モーメントMをφ軸およびφ軸まわりの回転モーメント  
に分けて考え、これらの分モーメントをそれぞれ $M_\psi$ および $M_\phi$ と記  
す。

$$M_\psi = M \cos(\theta_0^* - \theta_0) \quad \text{----- (4)}$$

$$M_\phi = M \sin(\theta_0^* - \theta_0) \quad \text{----- (5)}$$

となる。ところで回転に伴う構造物底面における地盤の鉛直応力分  
布 $\sigma_z$ を変位に比例的な分布、すなわち三角形分布と仮定する。なお回  
転軸は断面中心Oを通り、構造物の自重の影響は無視するものとす  
る。したがって、φ軸まわりの回転にあつては、鉛直応力分布 $\sigma_z$ は

$$\sigma_z = \frac{M_\phi}{J_\phi} r \cos(\theta_0^* - \theta), \quad \theta_0^* - \pi \leq \theta \leq \theta_0^* \quad \text{----- (6)}$$

$$J_\phi = \pi a b \left( \frac{a^2}{4} \sin^2 \theta_0^* + \frac{b^2}{4} \cos^2 \theta_0^* \right) \quad \text{----- (7)}$$

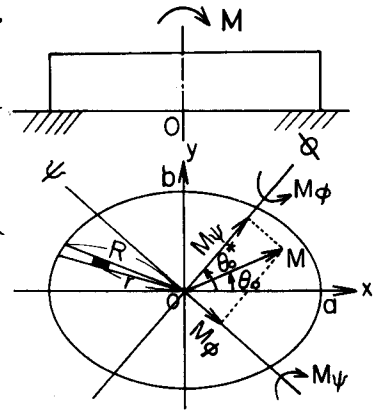


図-2 回転モーメントMを受ける楕円断面構造物

与えられる。ここに $J_\phi$ はφ軸に関する断面二次モーメントである。この $\sigma_z$ はφ軸に対して対称にな  
らないので、この $\sigma_z$ によるO点におけるφ軸まわりの、ψ軸まわりの回転角をそれぞれ $d\Omega_\psi$ ,  $d\Omega_\phi$ とす  
ると、式(3)を用いて次式をうる。

$$d\Omega_\psi = \frac{e^{i\omega t}}{2\pi G} \frac{(1+i k r)}{r^2} \sin(\theta_0^* - \theta) e^{-i k r} \sigma_z r dr d\theta \quad \text{----- (8)}$$

$$d\Omega_\phi = \frac{e^{i\omega t}}{2\pi G} \frac{(1+i k r)}{r^2} \cos(\theta_0^* - \theta) e^{-i k r} \sigma_z r dr d\theta \quad \text{----- (9)}$$

これらを全断面について積分したものを、それぞれ $\Omega_\psi$ ,  $\Omega_\phi$ とすると次式のごとくなる。

$$\begin{aligned} \Omega_\psi &= 2 \int_{\theta_0^* - \pi}^{\theta_0^*} \int_0^R \frac{M_\phi}{J_\phi} r \sin(\theta_0^* - \theta) \frac{e^{i\omega t}}{2\pi G} \frac{(1+i k r)}{r^2} \sin(\theta_0^* - \theta) e^{-i k r} r dr d\theta \\ &= \frac{a M_\phi}{\pi G J_\phi} e^{i\omega t} \int_{\theta_0^*}^{\theta_0^* + \pi} \sin^2(\zeta - \theta_0^*) P(k_r R_s) d\zeta \end{aligned} \quad \text{----- (10)}$$

同様にして、

$$\Omega_\phi = -\frac{a M_\phi}{\pi G J_\phi} e^{i\omega t} \int_{\theta_0^*}^{\theta_0^* + \pi} \sin(\zeta - \theta_0^*) \cos(\zeta - \theta_0^*) P(k_r R_s) d\zeta \quad \text{----- (11)}$$

$$\text{ここに、} P(k_r R_s) = \frac{k_r R_s}{k_r a} \left[ \frac{2 \sin k_r R_s}{k_r R_s} - \cos k_r R_s - i \left\{ \frac{2(1 - \cos k_r R_s)}{k_r R_s} - \sin k_r R_s \right\} \right] \quad \text{----- (12)}$$

$$k_r R_s = k_r a / \sqrt{1 + k_b^2 \sin^2 \zeta}, \quad k_b = \sqrt{a^2 - b^2} / b, \quad (a \geq b > 0) \quad \text{----- (13)}$$

一方、ψ軸まわりの回転については、この断面二次モーメント $J_\psi$ を用いて $\sigma_z$ は次式で与えられる。

$$\sigma_z = \frac{M_\psi}{J_\psi} r \cos(\theta_0^* - \theta), \quad \theta_0^* - \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \theta_0^* + \frac{\pi}{2} \quad \text{----- (14)}$$

$$J_\psi = \pi a b \left( \frac{a^2}{4} \cos^2 \theta_0^* + \frac{b^2}{4} \sin^2 \theta_0^* \right) \quad \text{----- (15)}$$

この $\sigma_z$ によるψ軸まわりのとφ軸まわりの全回転角をそれぞれ $\Omega_\psi$ および $\Omega_\phi$ とすると、同様にして

$$\Omega_\psi = \frac{a M_\psi}{\pi G J_\psi} e^{i\omega t} \int_{\theta_0^*}^{\theta_0^* + \pi} \sin^2(\zeta - \theta_0^*) P(k_r R_s) d\zeta \quad \text{----- (16)}$$

$$\Omega_{\psi\psi} = \frac{aM\psi}{\pi G J_{\psi}} e^{i\omega t} \int_{\theta_0^*}^{\theta_0^*+\pi} \sin(\gamma-\theta_0^*) \cos(\gamma-\theta_0^*) P(R_T R_C) d\gamma \quad \text{---- (17)}$$

$$\text{ここに, } R_T R_C = R_T a / \sqrt{1 + R_b^2 \cos^2 \gamma} \quad \text{---- (18)}$$

そこで、 $\theta = \theta_0^*$  方向（回転軸 $\psi$ ）が求める応答の方向であるとすると、結局中軸まわり、中軸まわりの全回転角 $\Omega_{\psi}$ 、 $\Omega_{\phi}$ は次式のように得られる。

$$\Omega_{\psi} = \Omega_{\psi\psi} - \Omega_{\phi\psi} = \frac{aM e^{i\omega t}}{\pi G} \int_{\theta_0^*}^{\theta_0^*+\pi} \sin(\gamma-\theta_0^*) \left[ \frac{\cos(\theta_0^*-\theta_0)}{J_{\psi}} \sin(\gamma-\theta_0^*) P(R_T R_C) + \frac{\sin(\theta_0^*-\theta_0)}{J_{\phi}} \cos(\gamma-\theta_0^*) P(R_T R_C) \right] d\gamma \quad \text{---- (19)}$$

$$\Omega_{\phi} = \Omega_{\phi\phi} - \Omega_{\psi\phi} = \frac{aM e^{i\omega t}}{\pi G} \int_{\theta_0^*}^{\theta_0^*+\pi} \sin(\gamma-\theta_0^*) \left[ \frac{\sin(\theta_0^*-\theta_0)}{J_{\phi}} \sin(\gamma-\theta_0^*) P(R_T R_C) - \frac{\cos(\theta_0^*-\theta_0)}{J_{\psi}} \cos(\gamma-\theta_0^*) P(R_T R_C) \right] d\gamma \quad \text{---- (20)}$$

ところで、通常の地盤と構造物との関係においては  $a/V_T \ll 1$  (sec) であるから、外乱の振動数 $\omega$ と地震動の卓越振動数 $\omega_0$ とに比べると  $R_T a = a\omega/V_T \leq 1$  程度のものと考えればよいであろう。このような場合の回転角 $\Omega_{\phi}$ における減衰効果（虚数部）の占める割合は小さく、その実部  $\text{Re}[\Omega_{\phi}]$  で支配される。かくして式(20)より次式を満たす $\theta_0^*$ が求める応答の方向を与えることになる。

$$\int_{\theta_0^*}^{\theta_0^*+\pi} \sin(\gamma-\theta_0^*) \left[ \frac{R_C \sin(\theta_0^*-\theta_0)}{a J_{\phi}} \sin(\gamma-\theta_0^*) \left\{ \frac{2 \sin R_T R_C}{R_T R_C} - \cos R_T R_C \right\} - \frac{R_C \cos(\theta_0^*-\theta_0)}{a J_{\psi}} \cos(\gamma-\theta_0^*) \left\{ \frac{2 \sin R_T R_C}{R_T R_C} - \cos R_T R_C \right\} \right] d\gamma = 0 \quad \text{---- (21)}$$

このとき  $\theta = \theta_0^*$  方向（中軸まわり）の応答特性と振動アドミッタンスおよび動的なね剛性をもって評価するため、それぞれ  $\lambda_R$  および  $K_R$ （静的な場合、 $\omega \rightarrow 0$  ではそれぞれ  $\lambda_R, K_R$ ）とすると、式(19)より

$$\lambda_R = \frac{1}{K_R} = \frac{\Omega_{\psi}}{M e^{i\omega t}} = \frac{a}{2GJ_0} \frac{2}{\pi} \int_{\theta_0^*}^{\theta_0^*+\pi} \sin(\gamma-\theta_0^*) \left[ \frac{\cos(\theta_0^*-\theta_0)}{J_{\psi}^*} \sin(\gamma-\theta_0^*) P(R_T R_C) + \frac{\sin(\theta_0^*-\theta_0)}{J_{\phi}^*} \cos(\gamma-\theta_0^*) P(R_T R_C) \right] d\gamma \quad \text{---- (22)}$$

さらに静的な場合は  $\omega \rightarrow 0$  とすることにより次式を得る。

$$\lambda_R = \frac{1}{K_R} = \frac{a}{2GJ_0} \frac{2}{\pi} \int_{\theta_0^*}^{\theta_0^*+\pi} \sin(\gamma-\theta_0^*) \left[ \frac{\cos(\theta_0^*-\theta_0)}{J_{\psi}^*} \sin(\gamma-\theta_0^*) + \frac{\sin(\theta_0^*-\theta_0)}{J_{\phi}^*} \cos(\gamma-\theta_0^*) \right] d\gamma \quad \text{---- (23)}$$

$$\text{ここに, } J_0 = \pi a^4/4, J_{\psi}^* = (b/a)^3 (1 + R_b^2 \cos^2 \theta_0^*), J_{\phi}^* = (b/a)^3 (1 + R_b^2 \sin^2 \theta_0^*) \quad \text{---- (24)}$$

ここで比較の規準として円形断面の場合の、静的回転のね剛性 $K_0 (= 2\pi G/a)$ 、断面二次モーメント $J_0 (= \pi a^4/4)$ を用いて、 $\lambda_R/\lambda_0 = \alpha_1 - i\alpha_2$ 、 $K_R/K_0 = R_1 + iR_2$  として、実数部と虚数部を別個に取り扱う。

**3 計算結果とその考察** 図-3は入力方向 $\theta_0$ と応答方向 $\theta_0^*$ とが断面形状の差によってどれだけ異なった値をとるかを示した図である。これより構造物の断面の長短径比 $a/b$ が大きければ、入力方向と応答方向との差が大きくなり、細長い構造物では入力方向がほぼ $22.5^\circ$ より大きくなると応答は急速に短軸方向に接近することが分る。図-4は振動アドミッタンス $\lambda_R$ と円形構造物の静的アドミッタンス $\lambda_0$ との比を示したものであり、 $\alpha_1, \alpha_2$ はそれぞれ実部および虚数のことである。入力方向が長軸に近いときは断面形状によるアドミッタンスの差は小さいが、それが $22.5^\circ$ をすぎると、その差は極端に増大する。これは断面二次モーメントの増減と逆比例の関係にあり、当然のことながら、この入力方向 $22.5^\circ$ は図-3と対応する。一方虚部 $\alpha_2$ は実部 $\alpha_1$ の急変する方位角の近傍でわずかに変動するが、量的には非常に小さい。表-1は応答方向 $\theta_0^*$ の外乱の振動数に対する依存の程度を示したものである。無次元振動数 $R_T a < 2$ では、一般的に $R_T a$ の増大とともに、わずかながら応答方向 $\theta_0^*$ が増大するが、入力方向 $\theta_0$ が $22.5^\circ$ の場合においては、振動数の変動によっても急激に応答方向が変化する場合もありうるようである。図-5、

図-6 おび図-7は振動アドミッタンス  $\Delta_R$  が、入力振動数および断面形状によって受ける影響を因示したものである。これらの図より、減衰を示す虚部  $\alpha_2$  は振動数とともに増大するが、断面形状、入力方向によっては大差なく、一方実部  $\alpha_1$  は断面が扁平なほど、入力方向が短軸方向に近ければ大く、したがって構造物の応答もこの傾向に従うものといえよう。

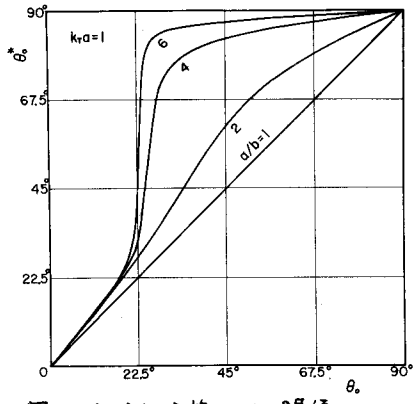


図-3 入力方向と応答方向との関係

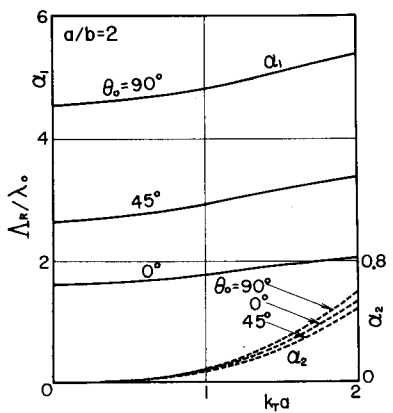


図-5 入力振動数に対する振動アドミッタンス

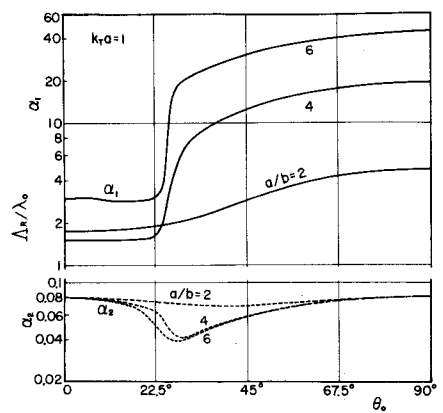


図-4 入力方向に対する振動アドミッタンス

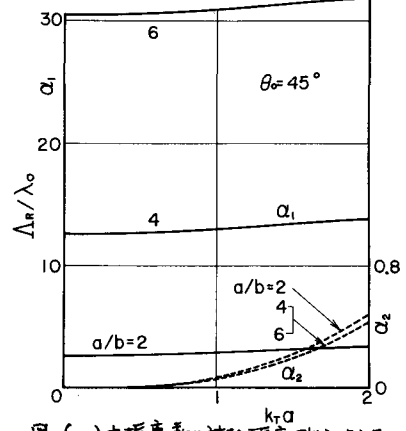


図-6 入力振動数に対する振動アドミッタンス

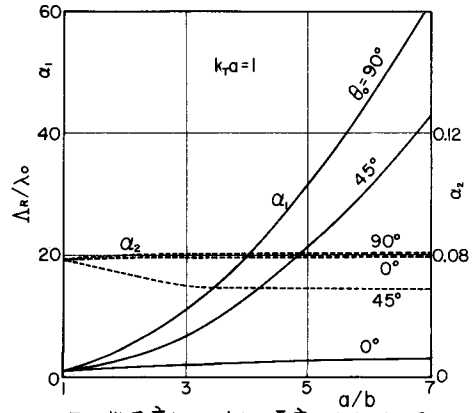


図-7 断面変化に対する振動アドミッタンス

表-1 入力振動数の応答方向に及ぼす影響

| $\theta_0$ | $\frac{k_r a}{a/b}$ | 0.2    | 0.6    | 1.0    | 1.4    | 1.8    |
|------------|---------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 22.5°      | 2                   | 26.60° | 26.89° | 27.39° | 27.87° | 28.09° |
|            | 4                   | 29.48° | 29.98° | 30.92° | 32.18° | 33.43° |
|            | 6                   | 33.67° | 34.92° | 38.58° | 82.45° | 82.80° |
| 45°        | 2                   | 58.93° | 59.71° | 60.87° | 61.87° | 62.30° |
|            | 4                   | 82.74° | 82.91° | 83.16° | 83.41° | 83.59° |
|            | 6                   | 87.15° | 87.20° | 87.26° | 87.34° | 87.29° |
| 67.5°      | 2                   | 78.66° | 78.93° | 79.31° | 79.62° | 79.75° |
|            | 4                   | 87.21° | 87.27° | 87.35° | 87.43° | 87.49° |
|            | 6                   | 88.86° | 88.87° | 88.90° | 88.92° | 88.94° |

1) 例えは、小堀・他：長方形基礎の Dynamic Ground Compliance, 東京防衛学報 第10号A, B2-2.3, pp. 283-341, 2) 田代見：耐震設計に關する基礎的研究, 数生研報, 第8号, 第4号, B2.24.3, pp. 176-217, 3) 野呂雄吉：後所著のための特殊関数とその応用, 日刊工業新聞社, pp. 305-335.