

京都大学 工学部 正員 後藤尚男

京都大学防災研究所 正員 土岐憲三

京都大学 大学院 学生員 ○佐藤忠信

1. まえがき

地震時の地盤の応答を求める場合、地盤を均質等方な線形弾性体とみなしその振動性状を解析することが多い。その基本概念は地震波のような程度の周期や振幅に対して地盤を構成する物質を線形弾性体として取り扱って良いということにある。地震学で取り扱うように、地表面からかなり深い基盤層を対象とするような場合には、この仮定も妥当と考えられるが、土木構造物の安全性に関係するような地表層では層を構成する物質が深い基盤層に比較してかなり軟弱かく、層内に発生するひずみが微小なものとしても、地盤を構成する土の応力とひずみの関係を線形弾性とするとはかなり大胆な仮定と言える。したがって、ここでは土の応力とひずみの関係を非線形弾性として地表層の解析を行い、非線形性を導入することによって起る2, 3の現象を調べた。

2. Constitutive Eq. と運動方程式

非線形多孔質弾性体が液体で飽和されている場合の Constitutive Eq. についての研究はほとんどなされていない。ここでは、このような物質のひずみエネルギー密度 Σ をラグランジュのひずみ不変量によってテーラ展開し、その3次までの項を取ることによって起る非線形性について考察する。なお非線形性は弾性骨格のみにあると考える。等方性の多孔質弾性体を考えれば Σ は次のように級数展開できると考えられる。

$$\Sigma = \alpha_E I_E + \beta I_f + \frac{1}{2} (\lambda_E + 2\mu_E) I_E^2 - 2\mu_E II_E + R I_f I_E + \frac{1}{2} Q I_f^2 + \ell_E I_E^3 + m_E I_E II_E + n_E III_E + f_1 I_f I_E + f_2 I_f I_E^2 + f_3 I_f^2 I_E + (\text{higher order term}) \quad (1)$$

ここに、 I_E, II_E, III_E : 弾性骨格のひずみ不変量、 I_f : 液体のひずみ不変量、 α_E, β : ひずみが零の時の弾性骨格の応力と液体圧、 $\lambda_E, \mu_E, \ell_E, m_E, n_E$: 弾性骨格の弾性定数、 Q : 液体の体積弾性率、 R, f_1, f_2, f_3 : 液体と弾性骨格の変形の間のカップリングを表す定数。

カーテジアンテンソル表示を用いれば、ラグランジュの応力テンソルの成分 (Pola-Kirchhoff の応力テンソルとも言う) はつぎの式(2) の関係を用いて式(3), (4) のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} T_{KL} &= \partial \Sigma / \partial E_{KL} ; \quad \partial I_E / \partial E_{KL} = \delta_{KL} ; \quad \partial II_E / \partial E_{KL} = I_E \delta_{KL} - E_{KL} \\ P_f &= \partial \Sigma / \partial I_f ; \quad \partial III_E / \partial E_{KL} = E_{KM} E_{ML} - I_E E_{KL} + II_E \delta_{KL} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここに、 T_{KL} : 弾性骨格の応力、 P_f : 液体の圧力、 δ_{KL} : クロネッカーのデルタ、 E_{KL} : 弾性骨格のひずみテンソルの成分、いま弾性骨格の変位を u_L 、液体の変位を U_L とおくと、微小ひずみの原理が成立する範囲で $E_{KL} = (u_{L,K} + u_{K,L})/2$ と表わされる。

$$T_{KL} = [\alpha_E + \lambda_E I_E + (3\ell_E + m_E) I_E^2 + (m_E + n_E) II_E + R I_f + f_1 I_f I_E + 2f_2 I_f I_E^2 + f_3 I_f^2] \delta_{KL} + [2\mu_E - (m_E + n_E) I_E - f_1 I_f] E_{KL} + n_E E_{KM} E_{ML} \quad (3)$$

$$P_f = \beta + Q I_f + R I_E + f_1 II_E + f_2 I_E^2 + 2f_3 I_f I_E \quad (4)$$

式(3),(4)の表わす特性を調べてみる。まず式(4)で弾性骨格のみに流体の体積変化が零の状態を
考える。この場合 $I_f = 0, I_E = 0$ となるから $P_f = \beta + f_1 I_E$ となる。いま弾性骨格の四面体せん断ひずみ
を $\gamma_{oct.E}$ とすれば $I_E = \frac{1}{3} I_E^2 - \frac{3}{2} \gamma_{oct.E}^2$ と表わされるから

$$P_f = \beta - \frac{3}{2} f_1 \gamma_{oct.E}^2 \quad (5)$$

となり、非線形性を考えれば、間けき水圧が弾性骨格のせん断ひずみに関係することになる。この現象は
ダイレイタンスーと呼ばれている。つぎに式(3)に δ_{KL} を作用させると次式を得る。

$$T_{KK} = 3[\alpha_E + \lambda_E I_E + R I_f + f_1 I_f I_E + 2 \frac{1}{2} I_f I_E + f_2 I_f^2 + (3 \lambda_E + \frac{4}{3} \mu_E + \frac{7}{7} n_E) I_E^2] \\ - \frac{3}{2} (3 \mu_E - n_E) \gamma_{oct.E}^2 \quad (6)$$

式(6)は非線形性を考えると平均主応力がせん断ひずみに影響されることを表わしており、式(5)の所で
述べたことを弾性骨格の立場から見たものといえる。こうしたことを考えると、式(3),(4)はいわゆる
ダイレイタンスー現象をも孔質媒質の応力とひずみの関係式に導入した式であると考えられる。

飽和した多孔質物体を支配する運動方程式は Poiseuille 形の減衰を考慮して次式で与えられる。¹⁾

$$T_{KL,L} = \rho_{11} \ddot{U}_L + \rho_{12} \ddot{\bar{U}}_L + b(\dot{U}_L - \dot{\bar{U}}_L) \\ P_{f,L} = \rho_{12} \ddot{U}_L + \rho_{22} \ddot{\bar{U}}_L - b(\dot{U}_L - \dot{\bar{U}}_L) \quad (7)$$

＝に、 ρ_{11} ：流体の中で動く弾性骨格の有効質量、 ρ_{12} ：流体と弾性骨格の間の質量カップリング、
 ρ_{22} ：流体の部分の有効質量。 b はダルシー法則による透水係数 k と $b = \mu \beta^2 / k$ なる関係にある。 μ
は流体の粘性係数、 β は間けき率。なお・は時間についての微分であり、 L は $\partial/\partial x_L$ を表す。

3. 水平層の振動解析

図1のような半無限に広がる基盤上の厚さ H の弾性層を考
える。層に入射する波が境界 $x_2 = 0$ に鉛直下方から一様に入る
 SH 波であるとするれば、これによって表層内に発生する応答変
位 $u_L, \bar{u}_L$ ($L=1, 2$) は x_2, t (時間) のみの関数と考えてより
ので、

$$u_1 = u_1(x_2, t), \quad u_2 = u_2(x_2, t) \\ \bar{u}_1 = \bar{u}_1(x_2, t), \quad \bar{u}_2 = \bar{u}_2(x_2, t) \quad (8)$$

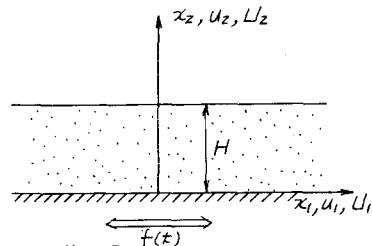


図1 弾性層

とおける。いま式(7)に式(3),(4)を代入すれば運動方程式を変位
で表示することができる。なお初期条件式は次式で表わされると考える。

$$t=0; \quad u_1=0, u_2=0, \bar{u}_1=0, \bar{u}_2=0, \dot{u}_1=0, \dot{u}_2=0, \dot{\bar{u}}_1=0, \dot{\bar{u}}_2=0 \quad (9)$$

3-(a) 流体の存在を考慮しない場合； この場合には、式(3)の Q, R, f_1, f_2, f_3 のかかっている
項と、式(7)の ρ_{12}, ρ_{22} のかかっている項を無視すればよい。さらに式(6)に線形粘性の影響を考えると
応力とひずみの関係は次式のように表わされる。

$$T_{KL} = [\alpha_E + \lambda_E I_E + (3 \lambda_E + \mu_E) I_E^2 + (\mu_E + n_E) I_E] \delta_{KL} + [2 \mu_E - (\mu_E + n_E) I_E] E_{KL} \\ + n_E E_{KM} E_{ML} + \lambda_U \dot{I}_E \delta_{KL} + 2 \mu_U \dot{E}_{KL} \quad (10)$$

＝に、 λ_U, μ_U は粘性係数を表わしている。式(8)を考慮して、式(10)を式(7)に代入し、変位で表わし
た運動方程式を求めると次式のようになる。

1) M.A. Biot "Mechanics of Deformation and Acoustic Propagation in Porous Media"
J. App. Phy. vol.3, NO.4 pp1432

$$\begin{aligned} \rho_s \ddot{u}_1 &= (\mu_E + \mu_U \frac{\partial}{\partial x}) u_1'' - \frac{m_E}{2} u_1'' u_2' - \frac{m_E}{2} u_2'' u_1' \\ \rho_s \ddot{u}_2 &= [\lambda_E + 2\mu_E + (\lambda_U + 2\mu_U) \frac{\partial}{\partial z}] u_2'' + 6\ell_E u_2'' u_2' - \frac{m_E}{2} u_1' u_2'' \end{aligned} \quad (11)$$

ニニに, ρ_s は層を構成している弾性体の単位質量を表わす。式(11)は弾性骨格のみに着目した式であるから Poiseuille 形の減衰は考えていない。なお'は $\partial/\partial x$ を表わす記号である。この場合境界条件式はつぎのように書く。

$$x_2 = 0 ; u_1 = f(x), u_2 = 0, x_2 = H ; T_{12} = 0, T_{22} = 0 \quad \text{より} \quad u_1' = 0, u_2' = 0 \quad (12)$$

式(11) は非線形連立偏微分方程式であるから, 解析的に解を求めることはかなり困難である。ここでは階差法で式(11) の数値解を求めることにする。

以下の解析では $\lambda_E = 800 \text{ kg/cm}^2$, $\mu_E = 200 \text{ kg/cm}^2$, $H = 10 \text{ m}$ とし, λ_U, μ_U は 0 とおいた。解の収束安定性については, 減衰のない線形方程式の解析解と比較し $t = 7 \text{ sec}$ まで振幅, 位相ともにほとんど一致するようにした。入力波 $f(x)$ は $A \sin \omega x$ なる正弦関数で A は $A \omega^2$ が 200 gal になるように選んだ。なお入力角波数は 2.5 cycle/sec とした。

図-2 は $m_E = \ell_E = 100 \text{ kg/cm}^2$ の時の $x_2 = H$ での応答で応答の同波数は入力のそれにほぼ一致している。 m_E, ℓ_E の値が変わったときの u_1 の応答がどのように変化するかを示したのが図-3 である。これから $m_E = \ell_E$ のもとで, 両者の値が 100 kg/cm^2 ($\mu_E/2$) 程度まで変化しても, u_1 の応答の振幅もさびに位相にまったく変化のないことがわかる。なお応答が共鳴現象を示しているのは, 系のせん断振動の 1 次の固有振動数がおおよそ 2.2 cycle/sec になるためである。

図-4 は $\ell_E = m_E$ のもとで, その値が 100 kg/cm^2 , 50 kg/cm^2 , 10 kg/cm^2 と変化した場合の u_2 の応答を示している。 u_2 の応答周波数は入力の同波数のおおよそ 2 倍の 5 cycle/sec になっている。

かつ振幅の大きさは u_1 のそれに比較してかなり小さいことがわかる。また応答は x 軸に対して非対称であり, u_2 の負の部分が正の部分の約 1.5 倍の大きさになっている。これは振動中に層が圧縮されることを表わしている。以上のことから考えると, 非線形性の小さい内は u_1 の応答は線形系のもので用いてよく, $u_2 \approx 0$ と考えてよいと思われる。しかし間げきが液体で飽和されている場合には u_2 の値が小さくとも, 液体の体積弾性率が大きいため, 大きな間げき水圧が発生すると考えられる。

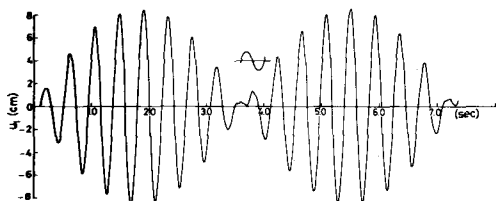


図-2 u_1 の応答

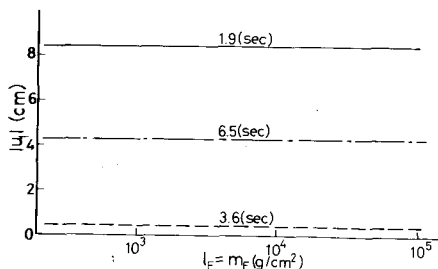


図-3 u_1 の ℓ_E, m_E による変化

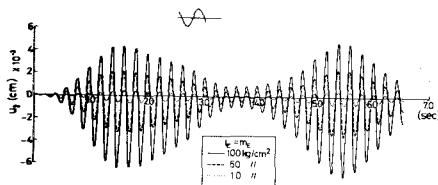


図-4 u_2 の応答

3-(b) 液体で飽和された多孔質弾性体の場合 ; 式(9)を考慮して式(3), (4)を式(7)に代入すれば変位で表わした運動方程式を得る。こうして得た運動方程式を一般的に解くには、境界条件として $x_2=0$ で弾性骨格と液体との間の相対速度が必要となるが、これを与える適當な方法が見当たらない。したがって以下の解析では Poiseuille 形の減衰は考えないことにする。運動方程式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} p_{11}\ddot{u}_1 + p_{12}\ddot{u}_2 &= M_E u_1'' - \frac{m_E}{2} u_2'' u_1' - \frac{m_E}{2} u_1'' u_2' - \frac{f_1}{2} u_2'' u_1' - \frac{f_1}{2} u_1'' u_2' \\ p_{11}\ddot{u}_2 + p_{12}\ddot{u}_1 &= (\lambda_E + 2M_E) u_2'' + 6k_E u_2'' u_2' - \frac{m_E}{2} u_1'' u_2' + R u_2'' + 2f_2 \{ u_2'' u_2' + L_2' u_2'' \} + 2f_3 L_2' u_2'' \\ p_{12}\ddot{u}_1 + p_{22}\ddot{u}_2 &= 0, \quad p_{12}\ddot{u}_2 + p_{22}\ddot{u}_1 = Q u_2'' + R u_2'' - \frac{f_1}{2} u_1'' u_2' + 2f_2 u_2'' u_2' + 2f_3 \{ u_2'' u_2' + L_2' u_2'' \} \end{aligned} \quad (13)$$

式(13)のやり式とやり式から $\ddot{u}_1$ が消去できるので、 u_1 についての境界条件がなくても u_1, u_2, L_2 についての解が求められる。いまこれらの3つの変数についての境界条件を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned} x_2=0; \quad u_1 &= f(t), \quad u_2=0, \quad L_2=0 \\ x_2=H \text{ で } T_{12} &= 0, \quad T_{22}=0, \quad P_4=0 \text{ より } u_1'=0, \quad u_2'=0, \quad L_2'=0 \end{aligned} \quad (14)$$

なお初期条件は式(9)で与えられる。

式(13)を解析的に解くことはかなり困難である。3-(a)で行なったと同様に階差法で数値解を求めることは可能であるが、液体の圧縮波の伝播速度が大きき場合には計算時間が長くなるため、一般的傾向を把握することは簡単でない。したがってここではつきのような仮定のもとに解析を進めることにする。まず3-(a)で行なった解析結果から類推して m_E が小さい内は u_1 に比較して u_2, L_2 はかなり小さいと考え $u_1' u_2'' \approx 0, u_2' u_1'' \approx 0, u_2' u_2'' \approx 0, L_2' u_1'' \approx 0, L_2' u_2'' \approx 0, u_2' u_2'' \approx 0, L_2' u_2'' \approx 0, L_2' L_2'' \approx 0$ とおくことにする。この場合式(14)と式(9)を満足しかつ $f(t) = A \sin \omega t$ に対する式(13)の定常強制振動解は次のようになる。

$$\begin{aligned} u_1 &= \bar{z}(x_2) \sin \omega t, \quad L_1 = -\frac{p_{12}}{p_{11}} \bar{z}(x_2) \sin \omega t \\ u_2 &= \eta_1(x_2) + \eta_2(x_2) \cos 2\omega t + \eta_3(x_2) \cos \beta_1 t + \eta_4(x_2) \cos \beta_2 t \\ L_2 &= \zeta_1(x_2) + \zeta_2(x_2) \cos 2\omega t + \zeta_3(x_2) \cos \beta_1 t + \zeta_4(x_2) \cos \beta_2 t \end{aligned} \quad (15)$$

ここに、 $\bar{z}, \eta_i, \zeta_i$ ($i=1, \dots, 4$) は $\omega, p_{11}, p_{12}, p_{22}, \lambda_E, M_E, m_E, x_2$ などの複合した関数である。 β_1, β_2 はつぎの2次方程式の根である。

$$\beta^2 \left(1 - \frac{p_{12} p_{12}'}{p_{11} p_{22}'} \right) + 4k^2 (C_p^2 + C_f^2 - \frac{p_{12}}{p_{11}} C_{r2}^2 - \frac{p_{12}'}{p_{22}'} C_{r1}^2) \beta + 16k^2 (C_p^2 C_f^2 - C_{r1}^2 C_{r2}^2) = 0 \quad (16)$$

ここに、 $k = \omega / c_s, c_s^2 = M_E / (p_{11} - \frac{p_{12}^2}{p_{22}}), C_p^2 = (\lambda_E + 2M_E) / p_{11}, p_{12}' = p_{12} - p_{11} \frac{f_1}{m_E}, p_{22}' = p_{22} - p_{12} \frac{f_1}{m_E}, C_f^2 = Q / p_{22}, Q' = Q - R \frac{f_1}{m_E}, R' = R - (\lambda_E + 2M_E) \frac{f_1}{m_E}, C_{r1}^2 = R / p_{11}, C_{r2}^2 = R' / p_{22}'$ 。

式(15)からつぎのことが明らかになる。(i) 非線形性を考慮すれば、鉛直下方から SH 波が入る場合でも水平方向のせん断振動のみでなく、グレイシャーニ一現象により鉛直方向の振動が発生すること。(ii) SH 波の波形を $A \sin \omega t$ とすれば、縦振動の振動数は 2ω とそれ以外の同波数が起ること。(iii) 表層内には発生する間けき水圧は式(4)で与えられる。 u_2, L_2 の値が小さくても Q, R, f_1, f_2, f_3 の値がかなり大まかと予想されるから、表層内には発生する P_2 はかなり大まかものになると考えられる。

式(15)を用いて定量的な解析を行なうには、具体的 $p_{11}, p_{12}, p_{22}, \lambda_E, M_E, Q, R, f_1$ についての値が必要となるが、現段階では p_{12}, m_E, R, f_1 などの値については推定のしようがないので、今後このような値についての実験的考察を進めるつもりである。