

九州大学工学部 正員 橋本 武
長崎大学工学部 正員 高橋和雄

1. 緒言 薄板の非線形振動に関する研究はこれ迄のところ基本的な板構造である1径間の矩形板および円板を対象としたものが大部分である^{1),2),3)}。これらの研究の基礎式には、Kármánの有限変形理論に基づくHerrmannの非線形運動方程式と板の歪エネルギーの第2不変量と無視したBergen⁴⁾の実用近似式に慣性力を加えた非線形運動方程式³⁾があるが、Herrmannの式に比較してBergenの拡張式の方が数学的取扱いが容易であるといえる。また全周辺単純支持矩形板に関してBergenの拡張式による解析結果とHerrmannの式に基づく近似解とが工学的に十分な精度で合致することが立証されている³⁾。したがって複雑な形状および境界条件をもつ板の非線形振動を解析するにはBergenの拡張式を用いる方が好都合であるといえる。以上の所論から著者はBergenの拡張式を用いて未解決のまゝなお残されている各種形状板の非線形振動を解明し、その特性を明らかにすることを意図するものであるが、本論ではその一環として全周辺で面内変位が拘束される直線辺単純支持扇形板の非線形自由および強制振動を論ずるもので、解析に当ってはガラーキン法を用いた。

2. 解法 周期的変動圧力を受ける板の非線形曲げ振動の傍介方程式は有限変形に関するBergenの式に慣性力を加えることにより次のごとく与えられる³⁾。

$$D \nabla^2 w - N \nabla^2 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p \cos \Omega t \quad (1)$$

$$\frac{N h^3}{12 D} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 = \frac{(1-\nu)}{E h} (N_r + N_\theta) \quad (2)$$

ここに、 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ 、 r, θ : 極座標系、 h : 板厚、 ρ : 板の密度、 $D = E h^3 / (12(1-\nu^2))$: 板剛度、 ν : ポアソン比

E : 弾性係数、 t : 時間、 w : 板のたわみ、 u, v : 板の半径、接線方向の面内変位、 N_r, N_θ : 板の半径、接線方向の面内応力、 $N: N_r, N_\theta$ と同じ次元をもつ定数、 p : 荷重強度、 Ω : 外力の円振動数

いま、図-1に示すごとき扇形板ACDBにおいて、円弧辺AB, CDの半径方向の面内変位 u および直線辺AC, BDの接線方向の面内変位 v が起こらないものとするれば、式(2)は次のごとく簡単となる。

$$\frac{N h^3}{24 D} \alpha(a^2 - b^2) = \frac{1}{2} \int_b^a \int_0^\alpha \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right\} r dr d\theta \quad (3)$$

扇形板の境界が単純支持または固定の場合には、式(3)は次のごとく書き換えられる。

$$\frac{N h^3}{24 D} \alpha(a^2 - b^2) = -\frac{1}{2} \int_b^a \int_0^\alpha w (\nabla^2 w) r dr d\theta \quad (4)$$

式(1)および式(4)の近似解をうるために板のたわみ w に関して次のごとく仮定する。

$$w = C W(r, \theta) F(t) \quad (5) \quad \text{ここに、} C: \text{振幅、} W(r, \theta): \text{境界条件を満足する座標関数、} F(t): \text{未知の時間関数}$$

式(5)の座標関数 $W(r, \theta)$ として、扇形板の線形振動の規準関数を用いるものとするれば、図-1に示す扇形板の場合には $W(r, \theta)$ を厳密に算定することが可能である。すなわち、式(1)に $N=0$ 、 $w = W(r, \theta) \cos \omega t$ および $p=0$ を代入のうえ整理すれば $W(r, \theta)$ に関して次式がえられる。

$$\nabla^2 W = \frac{\rho h \omega^2}{D} W \quad (6) \quad \text{ここに、} \omega: \text{線形振動の固有円振動数}$$

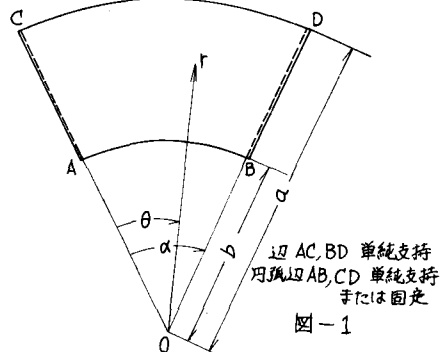


図-1

直線辺 AC, BD は単純支持されているゆえ、それらの境界条件を満足する $W(r, \theta)$ を次のごとく仮定することとができる。

$$W(r, \theta) = R(r) \sin \alpha \theta \quad (7) \quad \text{ここに, } \alpha_n = n\pi/a, n=1, 2, \dots, R(r): r \text{ のみの関数}$$

式(7)を式(6)に代入すれば、 $R(r)$ に関する Bessel の微分方程式および変形された Bessel の微分方程式の 2 つがえられ、したがってこれらの解を加え合わせることにより $R(r)$ の一般解が次のごとく算定されることとなる。

$$R(r) = A_n J_n(\beta r) + B_n Y_n(\beta r) + C_n I_n(\beta r) + D_n K_n(\beta r) \quad (8) \quad \text{ここに, } J_n(\beta r), Y_n(\beta r): \alpha_n \text{ 次の第 1 種, 第 2 種 Bessel}$$

関数, $I_n(\beta r), K_n(\beta r)$: 変形された α_n 次の第 1 種, 第 2 種 Bessel 関数, A_n, B_n, C_n, D_n : 積分定数, $\beta = r/a$, $R = \sqrt{r/a}$ 式(8)の積分定数 $A_n, \dots, D_n$ は扇形板の円弧辺の境界条件により決定される。すなわち、円弧辺の 4 つの境界条件式から扇形板の自由振動に関する固有値を算出し、かつ適当な標準関数に対する $A_n, \dots, D_n$ の比を求め、さらに、式(8)の $R(r)$ の最大値が 1 となるように積分定数を修正決定すれば、式(7)の $W(r, \theta)$ がえられることになる。次いで式(7)を式(1)に代入するとともに式(6)の条件式を用いれば、式(1)が次のごとく書き改められる。

$$c\rho R \omega^2 W F - CN \nabla^2 W F + c\rho R W \ddot{F} = p \cos \Omega t \quad (9) \quad \text{式(9)にガウーキン法を適用すれば次式となる。}$$

$$c\rho R F \int_b^a \int_0^\alpha W^2 r dr d\theta + c\rho R \omega^2 F \int_b^a \int_0^\alpha W^2 r dr d\theta - CN F \int_b^a \int_0^\alpha (\nabla^2 W) r dr d\theta = p \cos \Omega t \int_b^a \int_0^\alpha W^2 r dr d\theta \quad (10)$$

式(10)および式(4)から N を消去のうえ、整理すれば時間に関する 2 階の非線形常微分方程式が次のごとく求められ、扇形板の非線形振動に関する基礎式がえられることとなる。

$$\ddot{F} + \omega^2 F + \frac{6}{1-\mu^2} \frac{\gamma^2 C^2}{r^2 K^2} \omega^2 F^3 = \frac{48(1-\nu^2)}{\pi} \frac{\lambda}{r^2 K^2} \frac{\omega^2}{K} \frac{1}{E R^2} \cos \Omega t \quad (11) \quad \text{ここに, } \gamma = \int_\mu^1 \{A_n J_n(\beta r) + B_n Y_n(\beta r) + C_n I_n(\beta r) + D_n K_n(\beta r)\} \\ \{A_n J_n(\beta r) + B_n Y_n(\beta r) - C_n I_n(\beta r) - D_n K_n(\beta r)\} r dr, \eta = \int_\mu^1 \{A_n J_n(\beta r) + B_n Y_n(\beta r) + C_n I_n(\beta r) + D_n K_n(\beta r)\}^2 r dr, \mu = b/a \\ \lambda = \int_\mu^1 \{A_n J_n(\beta r) + B_n Y_n(\beta r) + C_n I_n(\beta r) + D_n K_n(\beta r)\} r dr$$

(1) 非線形自由振動 式(11)において強制力 p を 0 とすれば、扇形板の非線形自由振動に関する基礎式が次のごとくえられる。

$$\ddot{F} + \omega^2 F + \frac{6}{1-\mu^2} \frac{\gamma^2 C^2}{r^2 K^2} \omega^2 F^3 = 0 \quad (12) \quad \text{いま, 初期条件を } W(r, \theta, 0) = C W(r, \theta), W(r, \theta, 0) = 0 \text{ とすれば } F \text{ に}$$

関して次のごとく表わしうる。 $F(0) = 1, \dot{F}(0) = 0$ (13)

式(13)のもとに式(12)を解けば、Jacobi の楕円関数における関数 cn で与えられることとなり、次のごとく求められる。

$$F = cn \left(\lambda \omega \sqrt{1 + \frac{6}{1-\mu^2} \frac{\gamma^2 C^2}{r^2 K^2}}, \sqrt{2 + \frac{1-\mu^2}{2} \frac{\gamma^2 C^2}{r^2 K^2}} \right) \quad (14)$$

関数 cn は $4K$ の基本周期をもつ。したがって振動数 ν^* は次式で与えられる。

$$\nu^* = \frac{\omega}{4K} \sqrt{1 + \frac{6}{1-\mu^2} \frac{\gamma^2 C^2}{r^2 K^2}} \quad (15) \quad \text{ここに, } K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta \left(1 + \frac{1-\mu^2}{2} \frac{\gamma^2 C^2}{r^2 K^2} \right)}}, \quad (\text{第 1 種完全楕円積分})$$

式(15)の振動数 ν^* と扇形板の線形振動数 $\nu_0 = \frac{\omega}{2K}$ との比を求めれば、振動数比 ν^*/ν_0 が次式で与えられる。

$$\frac{\nu^*}{\nu_0} = \frac{r}{2K} \sqrt{1 + \frac{6}{1-\mu^2} \frac{\gamma^2 C^2}{r^2 K^2}} \quad (16)$$

(2) 非線形強制振動 外力の円振動数と同じ円振動数 Ω をもつ式(11)の定常解を求めれば次のとおりである。すなわち、 $F_1 = \cos \Omega t$ を逐次近似法の第 1 近似値として、式(11)の近似解を算定すれば次式のごとくえられる⁵⁾。

$$\frac{\Omega^2}{\omega^2} = 1 + \frac{9}{2} \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\gamma^2 C^2}{r^2 K^2} - \frac{48(1-\nu^2)}{\pi} \frac{\lambda}{r^2 K^2} \frac{2}{r} \frac{1}{K} \frac{\rho \omega^2}{E R^2} \quad (17) \quad F = \cos \Omega t + \frac{\frac{3}{1-\mu^2} \frac{\gamma^2 C^2}{r^2 K^2}}{16 \left\{ 1 + \frac{9}{2} \frac{1}{1-\mu^2} \frac{\gamma^2 C^2}{r^2 K^2} - \frac{48(1-\nu^2)}{\pi} \frac{\lambda}{r^2 K^2} \frac{2}{r} \frac{1}{K} \frac{\rho \omega^2}{E R^2} \right\}} \cos 3\Omega t \quad (18)$$

式(18)の周期解の安定性を調べるには、周期解 $F(t)$ にわずかな擾乱を加えたとき、その状態に戻ろうとするか、あるいは逆にその状態からさらに離れようとするかをみればよい。式(11)に $F + \delta$ を代入し、 F をまた式(11)を満足していることと考慮のうえ、 δ の高次の項を無視すれば、次のごとく Mathieu の微分

方程式がえられる。

$$\delta + (\delta + \epsilon \cos \gamma) \delta = 0 \quad (20) \quad \text{ここに} \quad \delta = \frac{1 + \frac{9}{4} \frac{\eta^2}{1 - \mu^2} \frac{c^2}{\lambda^2}}{4(1 + \frac{9}{2} \frac{\eta^2}{1 - \mu^2} \frac{c^2}{\lambda^2} - \frac{12(1 - \mu^2)\lambda}{\pi^2 \eta^2} \frac{1}{\lambda^2} \frac{c^2}{\lambda^2})}, \quad \epsilon = \frac{9}{4} \frac{1}{1 + \frac{9}{2} \frac{\eta^2}{1 - \mu^2} \frac{c^2}{\lambda^2} - \frac{12(1 - \mu^2)\lambda}{\pi^2 \eta^2} \frac{1}{\lambda^2} \frac{c^2}{\lambda^2}}, \quad \gamma = 2\Omega t \quad (21)$$

式(20)の周期解を摂動法を用いて論ずれば、 (δ, ϵ) 平面上における Mathieu の微分方程式の近似的な安定不安定判別図の境界線がえられ、この結果と式(21)の関係から $(\frac{\Omega}{\omega_0}, \frac{\eta}{\lambda})$ 平面上の周期解の安定、不安定領域を決定することができる。すなわち、 (δ, ϵ) 平面上における境界線 $\delta + \frac{\epsilon}{2} = \frac{1}{4}$ および $\delta - \frac{\epsilon}{2} = \frac{1}{4}$ は $(\frac{\Omega}{\omega_0}, \frac{\eta}{\lambda})$ 平面上において、それぞれ $d(\frac{\Omega}{\omega_0})/d(\frac{\eta}{\lambda}) = 0$ なる鉛直特線の軌跡および式(18)において $p=0$ とおいた自由振動の近似式で与えられ、この2曲線に囲まれる共振曲線の部分は不安定な周期解に該当するものであり、他の部分においては安定となるものである。

(3) 静的曲げに関する有限変形理論 式(11)に $\ddot{F}=0, F=1$ および $\cos \Omega t = 1$ と代入すれば、一様圧力を受ける扇形板の近似的な有限変形問題の基礎式となり、これより最大たわみ $\eta_{\max}$ と荷重強度 $\frac{P}{a^2}$ との関係が次のごとく簡単に算定されることとなる。

$$\frac{P a^2}{E h^3} = \frac{\eta_{\max}}{48(1-\mu^2)\lambda} + \frac{R^2 \pi}{8(1-\mu^2)(1-\nu^2)\lambda} \frac{\eta_{\max}^3}{a^3} \quad (22)$$

3. 境界条件の影響および正方形板との比較

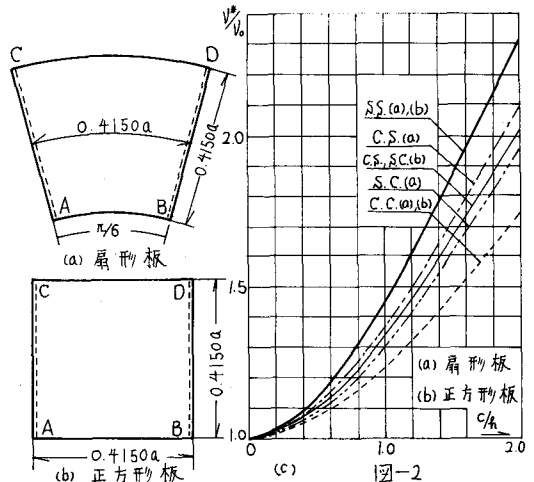
図-2(a)に示すごとく、 $\alpha = \pi/6$ 、 $\mu = 0.5850$ (扇形板の中央円弧長と

表-1

境界条件	R	η	λ
S.S.	10.7230	0.1644	0.1642
C.S.	11.4803	0.1393	0.1517
S.C.	11.9934	0.1229	0.1419
C.C.	12.9675	0.1008	0.1327

(a-b)の比が1の場合) および $\nu = 0.3$ の扇形板において、辺AB, CDの境界条件がいずれも単純支持の場合(S.S.), 辺AB固定, 辺CD単純支持の場合(C.S.), 辺AB単純支持, 辺CD固定の場合(S.C.) および辺AB, CDがいずれも固定の場合(C.C.)の4例を対照として、その非線形自由振動および非線形強制振動および静的曲げに関する有限変形問題の力学的特性を求めれば次のごとくである。なお計算に必要な諸量 η, λ, μ の値と各ケースについて算出すれば表-1に示すごとくえられる。

(1) 非線形自由振動 式(16)から振動数比 η/ω_0 と振幅比 $\eta_{\max}/a$ との関係と求め、これをプロットすれば、図-2(c)のごとくえられる。図より明らかのごとく、振動数比は振幅比の増大にともなって増加することがわかるが、異なる境界を有する4種類の扇形板について振幅比の影響と比較すれば、S.S.の場合が最も大きく、以下C.S.の場合、S.C.の場合の順で、C.C.の場合が最も小さいといえる。なお、比較対照のため、図-2(b)に示す1対辺単純支持正方形板において、辺AB, CDが扇形板の円弧辺と同様の各々の境界条件をもつ場合について振動数比を算出のうえプロットすれば図-2(c)に併記するごとく結果さうる。これよりS.S.およびC.C.の場合には扇形板の振動数比が正方形板のそれとほぼ完全に合致するといえるが、C.S.およびS.C.の場合には扇形板の特性が現われており、正方形板の振動数比とC.S.とS.C.の両扇形板の振動数比の中間の値となる。この事実は単純支持の場合が固定より振動数比におよぼす振幅比の影響が大であるという前述の結果がもうなづけるであらう。



(2) 非線形強制振動 表-1の諸値および式(18)とがら周期的変動圧力を受ける扇形板の応答曲線と各種境界条件のもとに容易に求めることができる。各ケースの λ と $\eta_{\max}$ との関係は $\frac{P}{a^2}$ と $\eta_{\max}$ との関係として

プロットすれば、それぞれ図-3

(a)~(d) に示すごとくえられる。

図において肉太の実線は式(16)と展開してえられる自由振動の近似解に對するものであり、また、点線は不安定領域に對するものである。 $\frac{\Omega}{\omega}=0$ の場合の解は外力 $\frac{P_0}{ER^2}$ が静的に作用した場合のたわみきを表すものである。

なお、本論文では減衰の影響を考慮していないので共振時の振幅が無限大となることは線形振動の場合と全く同様である。

(3) 静的曲げに関する有限変形問題

表-1の諸量を用いて式(22)から最大たわみ量と荷重強度 $\frac{P_0}{ER^2}$ との関係を求めれば、各々の境界条件に對してそれぞれ次のごとく与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{P_0}{ER^2} &= 746.4 \frac{c}{R} + 1121.0 \frac{c^3}{R^3} (S.S.), & \frac{P_0}{ER^2} &= 969.9 \frac{c}{R} + 1131.5 \frac{c^3}{R^3} (C.S.) \\ \frac{P_0}{ER^2} &= 1141.1 \frac{c}{R} + 1111.2 \frac{c^3}{R^3} (S.C.), & \frac{P_0}{ER^2} &= 1546.7 \frac{c}{R} + 1080.4 \frac{c^3}{R^3} (C.C.) \end{aligned} \quad (23)$$

式(23)の結果をプロットすれば図-4に示すごとくえられる。図において直線群(I)は各境界条件に應ずる線形解すなわち微小変形理論に基づく解を示し、また、曲線群(II)は扇形板の有限変形理論に基づく解を示すものである。図より明らか

なごときたわみの大きさが板厚と同程度になる有限変形の影響が顕著となることがわかり、かかる場合にはやはり微小変形理論を用うことに無理があることが数値的に立証される。なお、図-2(b)の正方形板の解を示せば次のごとくである。 $\frac{P_0}{ER^2} = 742.3 \frac{c}{R} + 1113.4 \frac{c^3}{R^3} (S.S.), \frac{P_0}{ER^2} = 1053.2 \frac{c}{R} + 1117.4 \frac{c^3}{R^3} (S.C.), \frac{P_0}{ER^2} = 1546.7 \frac{c}{R} + 1074.8 \frac{c^3}{R^3} (C.C.) (24)$

4. 結語 本論文ではBergenの有限変形理論に基づいて扇形板の非線形振動の基礎式を提示のうえ、種々の境界条件のもとに正方形板と形状に近い扇形板の非線形項の影響と自由振動、強制振動および静的曲げについて検討したが、扇形板の形状パラメーターである開角、内外径比がこれらにおよぼす影響については講演時に発表の予定である。

参考文献

- 1) H.N.Chu, G.Hermann; Influence of Large Amplitudes on Free Flexural Vibrations of Rectangular Elastic Plates, J. Appl. Mech., Vol. 23 (1956),
- 2) N.Yamaki; Influence of Large Amplitudes on Flexural Vibrations of Elastic Plates, ZAMM, Vol. 41 (1961),
- 3) Rheinboldt; Large Amplitude Flexural Vibration of Rectangular Plates, Int. J. Mech. Sci., Vol. 5 (1963),
- 4) H.M.Bergen; A New Approach to the Analysis of Large Deflections of Plates, J. Appl. Mech., Vol. 22 (1955),
- 5) I.I.Stoker; Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems, New York 1950, Interscience Publishers