

九州大学工学部 正会員 櫻木武
神戸製鋼所 ○篠崎正

1. 緒言 先に、周辺が単純支持され、かつ中間にて点支持される等方性矩形板すなわち無梁板構造の自由振動について報告し、当然予測されることであるが本構造が連続板に比べて、必ずしも有利でないことを理論的に明確ならしめた。一方、無梁板構造は一般に鉄筋コンクリート造であり、従ってスラブは直交異方性板と見做すのが妥当であることは周知のとおりである。そこで、本研究では前報告を拡張応用して直交異方性無梁板構造の自由振動を論ずると共に、算例において直角2方向の剛比および板の辺長比が振動数に及ぼす影響について考察を加えんとするものである。

2. 解法 (1) 規準関数の誘導 図1に示すごとく、スパン a , b の矩形板において、辺 AB に沿って x 軸、辺 AC に沿って y 軸、紙面に直交して z 軸を持つ直交座標系 (x, y, z) を導入する。また、板は周辺で単純支持され、かつ中間にて任意配列の交点で単純に支えられているものとし、各交点に交点番号 $11, 12, \dots, 15, 21, 22, \dots, 25, \dots, ij, \dots, 61, \dots, 65$ を付す。交点の垂直反力を強制力の一種とみなし、 $q(x, y, t)$ と書き表せば、本題の直交異方性無梁板の自由振動の基礎微分方程式は、板の強制振動のそれと同じ次式で与えられることになる。

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, y, t) \quad (1)$$

$$\text{ここに、} D_x = \frac{E_x h^3}{12(1-\nu_x^2)} \quad (x \text{ 方向の板剛度})$$

$$D_y = \frac{E_y h^3}{12(1-\nu_y^2)} \quad (y \text{ 方向の板剛度})$$

$$H = \sqrt{D_x D_y}$$

ρ : 板の密度, h : 板厚, E_x, E_y : 弾性係数, ν_x, ν_y : ポアソン比

w : 板のたわみ

式(1)の一般解は、その齊次方程式から得られる余関数を w_1 、特殊解を w_2 とすれば、両者の和で与えられるが、 w_2 として次式を仮定する。

$$w_2 = W_1 \sin(\omega t + \varepsilon) \\ = (X \sin N\pi \xi + Y \sin M\pi \eta) \sin(\omega t + \varepsilon) \quad (2)$$

ここに、 ω : 固有円振動数 ε : 初期位相角

$$\xi = x/a, \quad \eta = y/b, \quad M, N = 1, 2, \dots$$

式(2)を式(1)の齊次方程式に代入すれば、次の2式をうる。

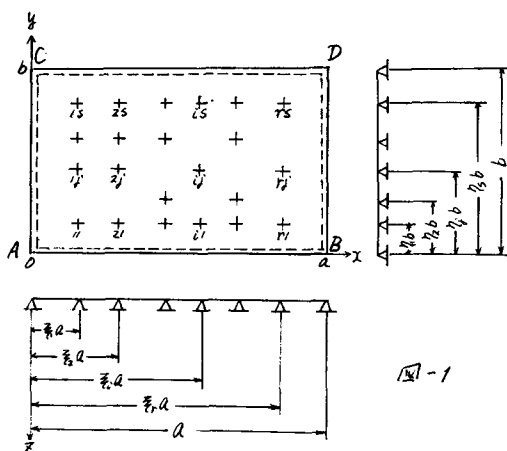


図-1

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2} - 2\sqrt{\lambda} \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu} \right)^2 \frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2} + \left\{ \lambda \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu} \right)^4 - \lambda^2 \right\} X &= 0 \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial \eta^2} - 2 \frac{1}{\sqrt{\lambda}} (\mu \pi)^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial \eta^2} + \left\{ \frac{1}{\lambda} (\mu \pi)^4 - \frac{1}{\lambda} \mu^2 \lambda^2 \right\} Y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここに

$$\lambda = D_1/D_2, \quad \mu = b/a, \quad \lambda^* = \frac{PR\omega^2 a^4}{D_2} \quad (4)$$

式(3)の各式から、 λ の各値に応じてそれぞれ種類の X および Y の一般解がえられ、したがって W として9通りの解がえられることになる。一方、本題の無梁板は周辺が単純支持されると同時に中宙で点支持されるゆえ、単に周辺のみで単純支持される矩形板より構造的に剛であり、したがってその固有値入の初期値は、単純支持矩形板のそれより大きいか、または等しいかのいずれかとなる。このことから9通りの W のうちただ一つだけが物理的意味を持つことになり、結局次のごとく求められることになる。

$$W = \{ (A_x \sin \bar{\kappa}_1 \xi + B_x \cos \bar{\kappa}_1 \xi + C_x \sinh \kappa_1 \xi + D_x \cosh \kappa_1 \xi) \sin \pi \eta + (A_y \sin \bar{\kappa}_2 \eta + B_y \cos \bar{\kappa}_2 \eta + C_y \sinh \kappa_2 \eta + D_y \cosh \kappa_2 \eta) \sin \pi \xi \} \sin(\omega t + \varepsilon) \quad (5)$$

$$\text{ここに, } \bar{\kappa}_1 = \sqrt{\lambda^2 - \lambda \left(\frac{\mu \pi}{a} \right)^2}, \quad \kappa_1 = \sqrt{\lambda^2 + \lambda \left(\frac{\mu \pi}{a} \right)^2}, \quad \bar{\kappa}_2 = \sqrt{(\mu \lambda)^2 - \frac{1}{\lambda} (\mu \pi)^2}, \quad \kappa_2 = \sqrt{(\mu \lambda)^2 + \frac{1}{\lambda} (\mu \pi)^2}$$

A_x, B_x, C_x, D_x および A_y, B_y, C_y, D_y は積分定数

次に、特殊解 W_0 を次のごとく誘導する。すなわち、中間支点 j の垂直反力を V_j' とすれば、 V_j' は次式のごとく変位 W と同じ時間 t の周期関数で与えられる。

$$V_j' = V_j \sin(\omega t + \varepsilon) \quad \text{ここに, } j = 1, 2, \dots, r \quad j = 1, 2, \dots, s \quad (6)$$

式(6)の V_j は反力 V_j' の最大値であり、これを正弦フーリエ級数を用いて x および y 方向に二重展開すれば次式のごとくなる。

$$\{V_j'\}_{SF} = \frac{4V_j}{\mu a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \pi x \bar{\xi}_n \sin \pi \eta \bar{\zeta}_m \sin \pi x \xi_n \sin \pi \eta \eta_m \quad (7)$$

ここに、 $\bar{\xi}_n = x/a$, $\bar{\zeta}_m = y/b$ であり、 (x_j, y_j) は中間支点 j の座標値である。

式(7)の $q(x, y, t)$ は板に作用する全強制力であり、本題の無梁板では中間支点反力の総和で与えられるゆえ、式(7)を式(6)に代入してえられる結果を、全ての j について加え合えれば、次式のごとく求められる。

$$q(x, y, t) = -\frac{4}{\mu a^2} \sum_{j=1}^r \sum_{j=1}^s V_j \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \pi x \bar{\xi}_n \sin \pi \eta \bar{\zeta}_m \sin \pi x \xi_n \sin \pi \eta \eta_m \sin(\omega t + \varepsilon) \quad (8)$$

ただし、 V_j' は上向きを正とする。

また、特殊解 W_0 として次式を仮定する。

$$\begin{aligned} W_0 &= W_0 \sin(\omega t + \varepsilon) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} G_{nm} \sin \pi x \bar{\xi}_n \sin \pi \eta \bar{\zeta}_m \sin(\omega t + \varepsilon) \end{aligned} \quad \text{ここに } G_{nm} \text{ は任意定数} \quad (9)$$

式(8)および式(9)を式(1)に代入すれば、式(9)の任意定数 G_{nm} が求まり次式をうる。

$$G_{nm} = -\frac{4a^2}{\pi^4 \mu D_2} \frac{\sum_{j=1}^r \sum_{j=1}^s V_j \sin \pi x \bar{\xi}_n \sin \pi \eta \bar{\zeta}_m}{\{m^2 + \lambda \left(\frac{\mu \pi}{a} \right)^2\}^2 - (\lambda/\mu)^4} \quad (10)$$

式(10)を式(9)に代入してえられる結果と式(5)とを加え合えれば、式(1)の一般解 W したがって無梁板の標準関数 $W (= W_1 + W_0)$ が次のごとく得られる。

$$\begin{aligned} W &= (A_x \sin \bar{\kappa}_1 \xi + B_x \cos \bar{\kappa}_1 \xi + C_x \sinh \kappa_1 \xi + D_x \cosh \kappa_1 \xi) \sin \pi \eta + (A_y \sin \bar{\kappa}_2 \eta + B_y \cos \bar{\kappa}_2 \eta + C_y \sinh \kappa_2 \eta + D_y \cosh \kappa_2 \eta) \sin \pi \xi \\ &\quad - \frac{4a^2}{\pi^4 \mu D_2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sum_{j=1}^r \sum_{j=1}^s V_j \sin \pi x \bar{\xi}_n \sin \pi \eta \bar{\zeta}_m}{\{m^2 + \lambda \left(\frac{\mu \pi}{a} \right)^2\}^2 - (\lambda/\mu)^4} \sin \pi x \bar{\xi}_n \sin \pi \eta \bar{\zeta}_m \end{aligned} \quad (11)$$

なお、上式において、 $\lambda = 1$ とけば等方性無梁板の標準関数が得られ、当然ながら文献(1)に示す結

果と合致する。

(2). 振動数方程式

本題の無梁板は周辺で単純支持されているから、その境界条件が次式のごとく表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \xi = 0, 1 \quad & X = 0, \quad \frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2} = 0 \\ \eta = 0, 1 \quad & Y = 0, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial \eta^2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式(12)を式(11)に代入すれば次のごとき連立方程式をうる。

$$\begin{pmatrix} (K'_{11}) & (K'_{12}) \\ (K'_{21}) & (K'_{22}) \end{pmatrix} \cdot \{A_x, B_x, C_x, D_x, A_y, B_y, C_y, D_y\}^T = 0 \quad (13)$$

ここに

$$(K'_{11}) = \begin{vmatrix} 0 & \bar{\kappa}_1 & 0 & \kappa_1 \\ 0 & -\bar{\kappa}_1^2 & 0 & \kappa_1^2 \\ \sin \bar{\kappa}_1 & \cos \bar{\kappa}_1 & \sinh \kappa_1 & \cosh \kappa_1 \\ -\bar{\kappa}_1^2 \sin \bar{\kappa}_1 & -\bar{\kappa}_1^2 \cos \bar{\kappa}_1 & \kappa_1^2 \sinh \kappa_1 & \kappa_1^2 \cosh \kappa_1 \end{vmatrix} \quad (K'_{22}) = \begin{vmatrix} 0 & \bar{\kappa}_2 & 0 & \kappa_2 \\ 0 & -\bar{\kappa}_2^2 & 0 & \kappa_2^2 \\ \sin \bar{\kappa}_2 & \cos \bar{\kappa}_2 & \sinh \kappa_2 & \cosh \kappa_2 \\ -\bar{\kappa}_2^2 \sin \bar{\kappa}_2 & -\bar{\kappa}_2^2 \cos \bar{\kappa}_2 & \kappa_2^2 \sinh \kappa_2 & \kappa_2^2 \cosh \kappa_2 \end{vmatrix}$$

$(K'_{12}) = 4 \times 4$ の零行列

また、無梁板の振動時における中間交点線の垂直変位を d_{kl} とすれば、 d_{kl} は垂直反力 V_{kl} と同じ時間 t の周期関数となり、次式のごとく表わされる。

$$d_{kl} = d_{kl} \sin(\omega t + \varepsilon) \quad (14)$$

中間交点線の垂直変位が作用反力に比例するものとし、その比例定数を δ_{kl} と記号表示すれば、式(14)は次のごとく書き改められる。

$$d_{kl} = \delta_{kl} V_{kl} \sin(\omega t + \varepsilon) \quad \text{ここに、} \delta_{kl} = d_{kl} / V_{kl} \quad (15)$$

無梁板の中間交点で板が浮き上がることがないものとすれば、全ての交点位置における板のたわみ $w(\xi_k, \eta_l)$ は式(15)に示す垂直変位 d_{kl} に等しくなければならず、このことから次のごとき一連の変形条件式をうる。

$$W(\xi_k, \eta_l) - \delta_{kl} V_{kl} = 0 \quad \text{ここに } k=1, 2, \dots, r, \quad l=1, 2, \dots, s, \quad (16)$$

式(16)と式(11)より次の連立方程式が得られる。

$$\begin{pmatrix} (K'_{11}) & (K'_{12}) \\ (K'_{21}) & (K'_{22}) \end{pmatrix} \cdot \{A_x, B_x, C_x, D_x, A_y, B_y, C_y, D_y, V_1, V_2, \dots, V_{kl}, \dots, V_{rs}\}^T = 0 \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに} \quad V_{kl} &= -\frac{4Q^2}{\pi^2 \mu D_2} V_{kl}, \quad \delta_{kl} = -\frac{\pi^2 \mu D_2}{4Q^2} V_{kl} \\ V_{kl}^* &= V_{kl}^* = \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^s \frac{1}{K_{knl}} \sin \pi \pi \xi_k \sin \pi \pi \eta_l \sin \pi \pi \xi_k \sin \pi \pi \eta_l \\ K_{knl} &= \{ \pi^2 + (\pi \frac{D_2}{D_1})^2 \}^2 - (\gamma/\pi)^4 \end{aligned}$$

$$(K'_{kl}) = \begin{bmatrix} \sin K_1 x_1 \sin N_1 y_1 & \cos K_1 x_1 \sin N_1 y_1 & \sin K_1 x_1 \cos N_1 y_1 & \cos K_1 x_1 \cos N_1 y_1 \\ \sin K_1 x_1 \sin N_1 y_2 & \cos K_1 x_1 \sin N_1 y_2 & \sin K_1 x_1 \cos N_1 y_2 & \cos K_1 x_1 \cos N_1 y_2 \\ \sin K_1 x_2 \sin N_1 y_1 & \cos K_1 x_2 \sin N_1 y_1 & \sin K_1 x_2 \cos N_1 y_1 & \cos K_1 x_2 \cos N_1 y_1 \\ \sin K_1 x_2 \sin N_1 y_2 & \cos K_1 x_2 \sin N_1 y_2 & \sin K_1 x_2 \cos N_1 y_2 & \cos K_1 x_2 \cos N_1 y_2 \end{bmatrix}$$

$$(K''_{kl}) = \begin{bmatrix} \sin K_2 x_1 \sin N_2 y_1 & \sin K_2 x_1 \cos N_2 y_1 & \sin K_2 x_1 \sin N_2 y_2 & \sin K_2 x_1 \cos N_2 y_2 \\ \sin K_2 x_2 \sin N_2 y_1 & \sin K_2 x_2 \cos N_2 y_1 & \sin K_2 x_2 \sin N_2 y_2 & \sin K_2 x_2 \cos N_2 y_2 \\ \sin K_2 x_1 \sin N_2 y_1 & \sin K_2 x_1 \cos N_2 y_1 & \sin K_2 x_1 \sin N_2 y_2 & \sin K_2 x_1 \cos N_2 y_2 \\ \sin K_2 x_2 \sin N_2 y_1 & \sin K_2 x_2 \cos N_2 y_1 & \sin K_2 x_2 \sin N_2 y_2 & \sin K_2 x_2 \cos N_2 y_2 \end{bmatrix}$$

式(9)と式(17)とを全て建立させれば、未知数 $A_k, B_k, C_k, D_k, A_g, B_g, C_g, D_g$ から V_{kl} ($k=1, 2, \dots, r; l=1, 2, \dots, s$) を求めるための基本連立方程式をうるが、定数項はいずれも零である。したがって、未知数 $A_k \sim D_g, V_{kl}$ のうち少なくとも1つ以上零でない解が存在するために、上述の連立方程式の係数行列式が零でなければならぬことより、いわゆる振動数方程式が次のように算定されることになる。

$$\begin{bmatrix} (K'_0) & (K''_0) & (K'_0) & (K''_0) \\ (K'_0) & (K'_0) & (K'_0) & (K'_0) \\ (K'_0) & (K'_0) & (K'_0) & (K'_0) \\ (K'_0) & (K'_0) & (K'_0) & (K'_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{11}^{11} \delta_{11} & H_{12}^{11} & H_{11}^{12} & H_{12}^{12} \\ H_{11}^{12} & H_{12}^{12} \delta_{12} & H_{11}^{12} & H_{12}^{12} \\ H_{11}^{21} & H_{12}^{21} & H_{11}^{22} & H_{12}^{22} \\ H_{11}^{22} & H_{12}^{22} \delta_{22} & H_{11}^{22} & H_{12}^{22} \end{bmatrix} = 0 \quad (18)$$

ここに、 $(K'_0)_{kl}$ は中間交点の橋数も*とすれば、4行*列の零行列である。

3. 計算例

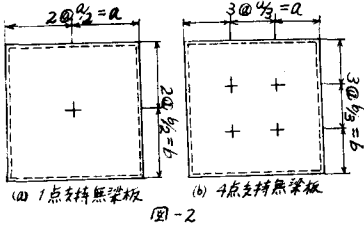


図2に示すごとく、1点および4点支持直交異方性板に関して固有値入と剛比 $\chi (=D_y/D_x)$ および辺長比 $\mu (=b/a)$ との関係を表1、表2に示すごとく算出すれば、それら表1、表2に示すごとく諸値をうる。

4. 結論

辺長比 μ が1.0の1点支持正方形無梁板において $\chi=1.0$ の1次固有値入 = 7.0248 は $\pi/2$ または $3\pi/2$ 線を軸とする

対称振動を表すものであるが、これに対応する χ の他の値の固有値は又通り存在する。例えば $\chi=1.1$ について考えれば、1次の固有値入 = 7.0588 は $\pi/2$ を軸とする対称振動であり、2次の固有値入 = 7.1613 は $\pi/2$ を軸とする反対称振動である。結局固有値入は χ の増大に伴っていずれも増加することとなる。

表-1 1点支持無梁板

次数	$\mu=1.0$	$\mu=1.5$	$\mu=2.0$
$\chi=1.0$			
1	7.0248*	5.2360*	4.4421*
2	7.2640	5.7070	4.7766
3	8.8858*	6.6231*	6.4766*
4	11.3272*	7.5514*	7.0248*
5	12.1280	8.3470	7.1730
$\chi=1.1$			
1	7.0588*	5.3170*	4.4969*
2	7.1613*	5.7940	4.8436
3	7.3500	6.6317*	6.8458*
4	8.9937*	7.6079*	7.0592*
5	11.4188*	8.4330	7.2790
$\chi=1.2$			
1	7.0915*	5.3935*	4.5368*
2	7.3014*	5.8760	4.9056
3	7.4270	6.6545*	6.9954*
4	9.0955*	7.6613*	7.0912*
5	11.4919*	8.5100	7.3750
$\chi=1.3$			
1	7.1226*	5.4657*	4.5965*
2	7.4098*	5.9520	5.2646
3	7.5000	6.6693*	6.5031*
4	9.1929*	7.7126*	7.1226*
5	11.5298*	8.5810	7.4630

表-2 4点支持無梁板

次数	$\mu=1.0$	$\mu=1.5$	$\mu=2.0$
$\chi=1.0$			
1	9.9340*	7.0248*	5.6634*
2	10.5160	8.8858*	6.5700
3	11.3272*	9.5030	6.8469*
4	13.3287*	9.6468*	7.8540*
5	15.0642	10.3171*	7.9780
$\chi=1.5$			
1	10.0455*	7.6303*	6.0882*
2	10.7450	8.0410*	8.1713*
3	10.8931*	8.2319	8.3075
4	11.5560	9.2529	8.6695
5	11.7122*	9.3682*	9.5834*

参考文献

1) T. YAMASAKI and T. CHISYAKI :
Free Vibration of Rectangular Plates
Supported Simply by Edge-Supports
(Pilot Slabs),
Proceedings of the Symposium on
Thin-Walled Structures and
Space Structures, March, 1969