

# I-194 3連モーメントをフレキシビリティとする デイスクリートな振動モデルについて

室蘭工業大学 正員 能野 純雄  
全 上 正員 松岡 健一  
全 上 学生員 ○佐渡 公明

## 1. まえがき

一般に橋梁の固有振動数を解析的に求めるには、力学的に等価な有限自由度の discrete な振動系に単純化して取扱うのが便利である。本文は、その際、3連モーメント式をフレキシビリティ(弾性性状)とする方法により分割数が少なくても、精度の良い固有振動解析ができることを示したものである。

即ち曲げ振動では通常の3連モーメント式をフレキシビリティとし、せん断力の釣合式と組み合わせ、曲げ振れ振動に於ては、各分割点での振れ角  $\varphi_r$  と曲げ振れモーメント  $B_r$  を未知量とし、 $\varphi_r$  については分割点  $r$  の両区画部分の振れモーメントの釣合を取り、 $B_r$  については  $\varphi_r$  が  $r$  で微分的に連続しているという条件より曲げ振れに対する3連モーメント式を導き、これをフレキシビリティとした。

最後に2, 3の数値計算例をもって精度の良いことを示した。

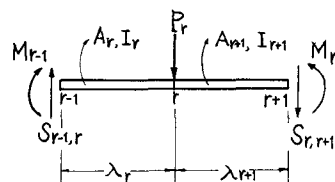


図-1

## 2. 曲げ振動解析 図-1に示した記号を用い、橋梁 $r$ の両区画部分

のせん断力の釣合を取ると  $\frac{M_{r-1}}{\lambda_r} - \left(\frac{1}{\lambda_r} + \frac{1}{\lambda_{r+1}}\right) M_r + \frac{M_{r+1}}{\lambda_{r+1}} = -P_r$  (1)

$P_r$  を慣性力  $-\frac{\gamma \lambda_r A_r}{g} \ddot{y}_{r,t}$  で置き換えると(  $\ddot{\phantom{x}}$  は時間  $t$  での2度微分)

$$\frac{M_{r-1,t}}{\lambda_r} - \left(\frac{1}{\lambda_r} + \frac{1}{\lambda_{r+1}}\right) M_{r,t} + \frac{M_{r+1,t}}{\lambda_{r+1}} = \frac{\gamma \lambda_r A_r}{g} \ddot{y}_{r,t} \quad (2)$$

正弦振動と仮定して  $y_{r,t} = y_r \sin p t$ ,  $M_{r,t} = M_r \sin p t$  とおくと

$$-\frac{\gamma}{\lambda_r A_r} \left\{ \frac{M_{r-1}}{\lambda_r} - \left(\frac{1}{\lambda_r} + \frac{1}{\lambda_{r+1}}\right) M_r + \frac{M_{r+1}}{\lambda_{r+1}} \right\} = p^2 y_r \quad (3) \quad (p: \text{円振動数})$$

$$\text{他方3連モーメント式は } \frac{1}{6E} \left\{ \frac{\lambda_r}{I_r} M_{r-1} + 2 \left( \frac{\lambda_r}{I_r} + \frac{\lambda_{r+1}}{I_{r+1}} \right) M_r + \frac{\lambda_{r+1}}{I_{r+1}} M_{r+1} \right\} = -\frac{y_r}{\lambda_r} + \left( \frac{1}{\lambda_r} + \frac{1}{\lambda_{r+1}} \right) y_r - \frac{y_{r+1}}{\lambda_{r+1}} \quad (4)$$

$$(4), (3) \text{ をマトリックス表示して } A\{M\} = B\{y\} \quad \cdots \cdots (5) \quad C\{M\} = p^2 E\{y\} \quad \cdots \cdots (6)$$

$$(5), (6) \text{ より } \{M\} \text{ と消去して } \{CA^T B - p^2 E\} \{y\} = 0 \quad \cdots \cdots (7) \quad E: \text{単位マトリックス}$$

$$\{y\} \neq 0 \text{ であるから, 次の振動数方程式が得られる } \det(CA^T B - p^2 E) = 0 \quad \cdots \cdots (8)$$

今、等断面・等区間長の場合を考え(4)を差分式で表わすと

$$\frac{1}{6EI} \{ \Delta^2 M_{r-1} + 6M_r \} = -\frac{\Delta^2 y_{r-1}}{\lambda^2} \quad \cdots \cdots (9) \quad \Delta^2 M_{r-1} = 0 \text{ とすると } \frac{M_r}{EI} = -\frac{\Delta^2 y_{r-1}}{\lambda^2} \quad \cdots \cdots (10)$$

よって discrete な振動系を考える場合、3連モーメントをフレキシビリティとする方法が  $\Delta^2 M_{r-1}$  を考慮しているので、 $M = -EI \ddot{y}$  の差分式をフレキシビリティとする方法より精度の良いことが分かる。

## 3. 曲げ振れ振動解析 (曲げ振れ振動に対する3連モーメント式の誘導)

$$\text{振れ荷重が作用した桁の微分方程式は } (EC_w \ddot{\varphi}) - GJ \ddot{\varphi} = m_T \quad \cdots \cdots (11) \quad B = -EC_w \ddot{\varphi} \quad \cdots \cdots (12)$$

$B$ : 曲げ振れモーメント  $\varphi$ : 振れ角  $EC_w$ : 曲げ振れ剛性  $m_T$ : 等分布振れ荷重

$GJ$ : 振れ剛性  $\ddot{\phantom{x}}$  は図-2に示す様、せん断中心を通してスパン方向に  $x$  軸を取り、 $x$  での2度微分

(11), (12)より $\varphi$ を消去し  $\ddot{B} - k^2 B = 0 \quad \cdots (13) \quad k^2 = \frac{GJ}{EC_w}$

$B=B_{r+1}$  の境界条件で (13) を解くと

Diagram illustrating the decomposition of a composite section into two rectangular parts for the calculation of the centroid.

The left part is a square with side length  $a$  and centroid  $G$ . The right part is a rectangle with width  $b$  and height  $h$ , divided into two sub-rectangles with widths  $b_1$  and  $b_2$  and heights  $h_1$  and  $h_2$ .

The centroid of the entire section is  $Z$ , and the centroid of the right part is  $G_2$ . The distance between  $G$  and  $Z$  is  $e_1$ , and the distance between  $G_2$  and  $Z$  is  $e_2$ .

The centroid of the right part is also labeled  $G_1$ .

G: 重心  
T: せん断中心

圖 - 2

(15), (16) を差分式で表わして  $H_{r,r+1} = H_{r+1,r} = \frac{\Delta B_r}{\lambda_{r+1}} + \frac{GJ_{r+1}}{\lambda_{r+1}} \Delta \varphi_r$  (17)

$M_{Tr}$  を慣性トルク  $-\frac{\gamma \lambda_r I_{pr}}{g} \ddot{\varphi}_{r,t} - \frac{\gamma \lambda_r A_r}{g} (e_r \ddot{\varphi}_{r,t}) e_r$  で置き換えると

正弦振動を仮定して  $y_{r,t} = y_r \sin pt$ ,  $B_{r,t} = B_r \sin pt$  とおくと (19) は

次に (14) を 2 重積分して

(21) を  $x$  で微分し,  $r, r+1$  間では評価すると

但 L  $\varphi_r(0) = \frac{1}{\tanh k r_1 \lambda r_1} - \frac{1}{k r_1 \lambda r_1}$ ,  $\varphi_r(1) = \frac{1}{\sinh k r_1 \lambda r_1} - \frac{1}{k r_1 \lambda r_1} \dots (24)$

$$-\frac{k_r \varphi_{r-1}(1)}{G_{Jr}} B_{r-1} + \left( \frac{k_r \varphi_{r-1}(0)}{G_{Jr}} + \frac{k_{r+1} \varphi_r(0)}{G_{Jr+1}} \right) B_r - \frac{k_{r+1} \varphi_r(1)}{G_{Jr+1}} B_{r+1} + \frac{\varphi_{r+1}}{\lambda_r} - \left( \frac{1}{\lambda_r} + \frac{1}{\lambda_{r+1}} \right) \varphi_r + \frac{\varphi_{r+1}}{\lambda_{r+1}} = 0 \quad (25)$$

$$(25), (20) \text{ をマトリックス表示して } \quad F\{B\} = G\{\varphi\} \quad \cdots (26) \quad H\{B\} + I\{\varphi\} = p^2 E\{\varphi\} \quad \cdots (27)$$

そこで、等断面・等区間長の場合(25)は、
$$-\frac{k\lambda}{GJ}\left\{\varphi(1)\Delta^2 B_{r-1} + 2(\varphi(1) - \varphi(0))B_r\right\} + \Delta^2 \varphi_{r-1} = 0 \quad \text{----- (29)}$$

(30)式は、 $B = -EC\omega^2$ と差分式にした式に一致する。即ち曲げ振動の場合と同様、曲げ振れに対する3連モーメントをフレキシビリティとする方法が $\Delta^2 B_{K1}$ を考慮しているのど、 $B = -EC\omega^2$ の差分式でフレキシビリティとするよりも精度の差が優れていることが証明された。

$$P_r = -\frac{\chi\lambda r A r}{q} (\dot{\gamma}_{r,t} + e_r \dot{\varphi}_{r,t}), \quad M_{r,t} = -\frac{\chi\lambda r I_{pr}}{q} \dot{\gamma}_{r,t} - \frac{\chi\lambda r A r}{q} (\dot{\gamma}_{r,t} + e_r \dot{\varphi}_{r,t}) e_r \quad (31)$$

568

$$C\{M\} = p^2 E\{y\} + p^2 D\{y\} \quad \dots (32)$$

$$H\{B\} + H\{y\} = p^2 E\{y\} + p^2 J\{y\} \quad \dots (33)$$

この式と(5),(26)の4つの式より, 例えば $\{B\}, \{M\}, \{y\}$ を消去し $\{y\} \neq 0$ の条件より次の振動数方程式が得られる.  $\det[(HF^1G + I - p^2E)D^{-1}(CA^1B - p^2E) - p^4J] = 0 \quad (34)$

#### 4. 数値計算例による精度の比較

##### 4-1. 曲げ振動 --- 等断面・等区間長

○単純支持 3連モーメントをフレキシビリティとする場合

(4),(3)を差分式にし,  $\sin$ でフーリエ変換すると 但し  $D_i = 2(1 - \cos \frac{i\pi}{n})$

$$\frac{EI}{\lambda^2} D_i S_i[y_r] = \frac{(6-D_i)}{6} S_i[M_r], \quad D_i S_i[M_r] = \frac{\gamma \lambda^2 A}{9} p^2 S_i[y_r] \quad \text{この式より } p = \frac{n^2 D_i}{6} \sqrt{\frac{EI \gamma}{\lambda^2 A}} \quad \dots (35)$$

$M_r = -EI \frac{\Delta^2 y_{r-1}}{\lambda^2}$  をフレキシビリティとする場合

$$S_i[M_r] = \frac{EI}{\lambda^2} D_i S_i[y_r] \text{ と } D_i S_i[M_r] = \frac{\gamma \lambda^2 A}{9} p^2 S_i[y_r] \text{ より } p = \frac{n^2 D_i}{6} \sqrt{\frac{EI \gamma}{\lambda^2 A}} \quad \dots (36)$$

厳密解は  $p = \frac{i^2 \pi^2}{6} \sqrt{\frac{EI \gamma}{\lambda^2 A}} \quad \dots (37)$  以上により図-3に固有振動数, 周期の精度と分割数 $n$ に対して1次から3次迄示す. 固定支持の場合は紙面の都合上省略する.

##### 4-2. 曲げ振れ振動 --- 等断面・等区間長

○単純支持 曲げ振れに対する3連モーメントをフレキシビリティとする場合

$$(20), (25) \text{ から同様に計算し } S_i[y_r] \neq 0 \text{ より } p = \sqrt{\frac{D_i^2}{k \lambda \{ \varphi(1) D_i - 2(\varphi(1) - \varphi(0)) \}}} \times \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{GJ \gamma}{I_p + e^2 A}} \quad (38)$$

$B_r = -EC_w \frac{\Delta^2 y_{r-1}}{\lambda^2}$  をフレキシビリティとする場合

$$B_r = -EC_w \frac{\Delta^2 y_{r-1}}{\lambda^2} \text{ と (20) より同様に } p = \sqrt{\frac{D_i^2}{k^2 \lambda^2} + D_i} \times \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{GJ \gamma}{I_p + e^2 A}} \quad (39)$$

I形, box断面について固有振動数の精度を夫々図-4, 図-5に示す.

○固定支持 曲げ振れに対する3連モーメントをフレキシビリティとする場合

$$-\varphi(0) + \frac{2\varphi(1)}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{\Delta_1} \left[ \frac{GJ D_i}{k \lambda} + \varphi(1) \left\{ GJ D_i - \frac{\gamma \lambda^2}{9} (I_p + e^2 A) p^2 \right\} \right] \sin^2 \frac{i\pi}{n} + \frac{EC_w k}{\lambda} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2\alpha_i}{\Delta_1} (\varphi(0) - \varphi(1)) \sin^2 \frac{i\pi}{n} = 0 \quad \dots (40)$$

$$\Delta_1 = -\frac{GJ D_i^2}{k \lambda} + \left\{ -\varphi(1) D_i + 2(\varphi(1) - \varphi(0)) \right\} \left\{ GJ D_i - \frac{\gamma \lambda^2}{9} (I_p + e^2 A) p^2 \right\} \quad \alpha_i = \begin{cases} (-1)^{i-1} & \text{for 対称振動} \\ -(-1)^{i-1} & \text{for 逆対称振動} \end{cases}$$

$$B_r = -EC_w \frac{\Delta^2 y_{r-1}}{\lambda^2} \text{ をフレキシビリティとする場合 } \Delta_2 = -\frac{EC_w D_i^2}{\lambda^2} - GJ D_i + \frac{\gamma \lambda^2}{9} (I_p + e^2 A) p^2$$

$$-\varphi(0) + \frac{2\varphi(1)}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{\Delta_2} \frac{EC_w D_i}{\lambda^2} \sin^2 \frac{i\pi}{n} + \frac{EC_w k}{\lambda} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{\Delta_2} \sin^2 \frac{i\pi}{n} = 0 \quad (41)$$

図-4, 図-5に示した桁に対し結果を図-6に示す. フーリエ変換については参考文献1)参照

#### 5. 結び discreteな振動系を想定するとき, カ(ortル7)の釣合式ともう一本の式としてFlexibility

に関するものがあるが, このFlexibilityとして3連モーメントを用いる方が, 曲げ振動に対しては  $M = -EI \ddot{y}$  の差分式(曲げ振れ振動では  $B = -EC_w \ddot{y}$  の差分式)を用いるより精度の良いことを明らかにした. 例えば, 図-3より単純支持桁・曲げ振動1次に対して3連モーメントによる場合は, 2分割で約99%, 4分割で約100%に対し,  $M = -EI \ddot{y}$  の差分式による場合は夫々約87%, 95%である.(fの厳密解と比較) 固定支持・曲げ振動, 曲げ振れ振動では断面諸元,  $l, \gamma$ の影響が入ってきて, 単純支持・曲げ振動のように一般的な精度比較はできない. 曲げ振れ振動では  $B = -EC_w \ddot{y}$  の差分式でFlexibilityとする場合の誤差はI形断面の方がbox断面より大きく, 又一般に固定支持の方が単純支持より誤差は大きい.

3連モーメントを Flexibility とする場合、二の逆になる。

更に一般に曲げ振動でも、曲げ振水振動でも3連モーメントによる方法より、 $M = -EI\ddot{y}$  (or  $B = -EC\ddot{w}$ ) の差分式による方法が、振動次数が高くなるにつれ、誤差の増加が大きい。結局分割数が少なくても3連モーメントを Flexibility とした場合、精度は差程落ちないようである。今後は、平板やセルの固有振動問題に対して、この3連モーメントを Flexibility とする考え方を拡張していきたい。

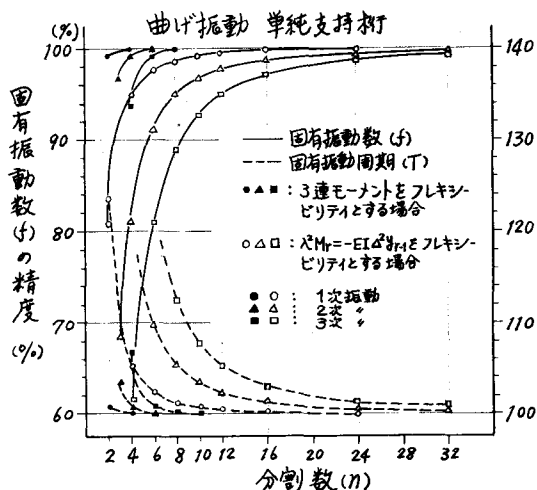


図-3

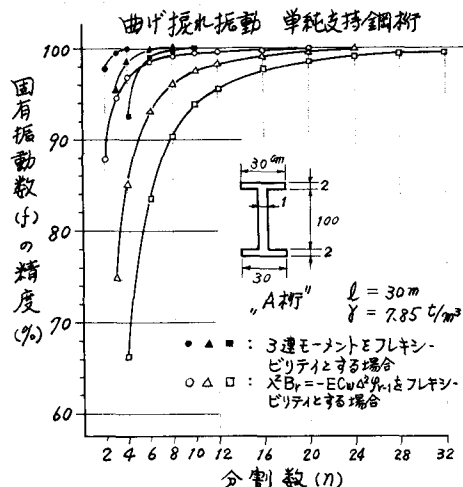


図-4

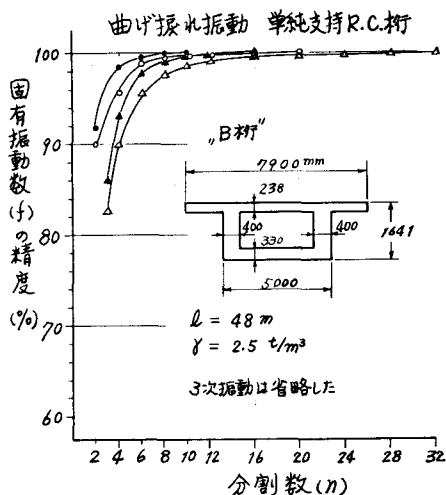


図-5

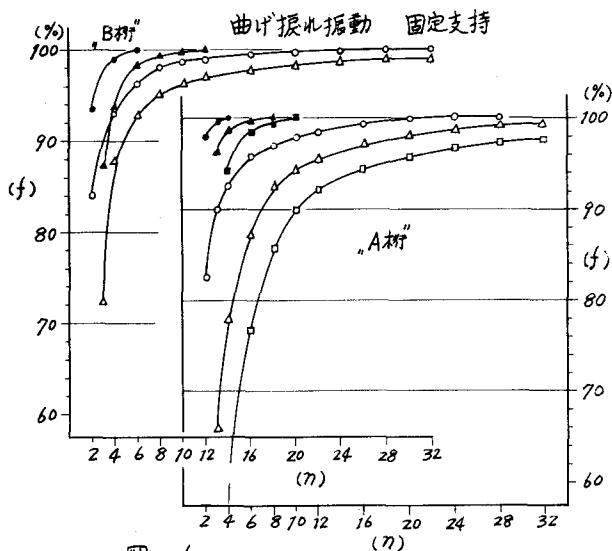


図-6

- 参考文献 1). S.G.Nomachi: A Note on Finite Fourier Transforms Concerning Finite Integration (Trans. Mem. Vol.5, No. 2)  
2). S. テモシェンコ: 工業振動学