

1. まえびき

特に軟弱な地盤の地震応答特性を解析するにあたり、筆者は *Adriess* と *Seed*⁽¹⁾ に習い、剪断連続梁としての等価質量-バネ系に置換して考慮する方法を使用してきた。地盤が多層になるに従って固有振動数方程式が著しく複雑な超越方程式になるため解析は困難になるが、*Newton* の逐次近似法(数値解法)を使用することにより真の値に近い固有値を求めることができた。そのため、多層地盤の地震応答も簡便に扱うことが可能になった。

ここでは青森県津軽大橋架設地災の軟弱層を例にとりて同方法により解析を行い、合せて人工地震による弾性波記録の解析から得た地中の振幅分布と比較検討してみた。

2. 理論の概要

地震時において、一般には *S* 波がもっとも卓越することから、今地動は剪断変形のみによって上方に伝播すると考える。地盤が水平で、しかも水平方向に等質であれば地盤の横方向への広がり地震応答には影響を与えないと見做して、地盤を単位の柱状連続梁に置換して考え、その振動をもつて地盤全体の振動を論ずることとする。つまり地盤に対して基盤を完全剛体として扱い、地動を一端固定剪断連続梁の強制振動と解している。

1) 剪断振動方程式とそのモード解

多層地盤について、剪断梁の k 番目の層の振動方程式は梁の微小部分の動的なつりあいを考える

$$\rho_k \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} + c_k \frac{\partial u_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ G_k \frac{\partial u_k}{\partial z} \right\} \quad \text{----- (1)}$$

で表わせる。ここに、 ρ_k , c_k および G_k は密度、粘性減衰係数および剪断弾性係数で、 u は深さ z における時刻 t での水平 x 方向変位である。式(1)は2階偏微分方程式であるが、変数分離法によりモード型と固有振動数を導くことから解けよう。変数分離した z のみ t のみの式は、

$$u_k(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_{kn}(z) \cdot T_{kn}(t) \quad \text{----- (2)}$$

を適当に式(1)に代入して次のように表わせる。

$$\frac{d^2 Z_{kn}}{dz^2} + a_k^2 p_n^2 Z_{kn} = 0 \quad (3) \quad \frac{d^2 T_{kn}}{dt^2} + 2h_n p_n \frac{dT_{kn}}{dt} + p_n^2 T_{kn} = 0 \quad \text{----- (4)}$$

ここに、 $a_k = \sqrt{\rho_k / G_k}$, $h_n = c_k / 2\rho_k p_n$ および $c_k / \rho_k = c_{k+1} / \rho_{k+1}$ である。

そして固有モード型 $Z_{kn}(z)$ および式(4)の右辺に時間 t のみの関数である強制力 $\{-\rho_k d^2 g(t) / dt^2\}$ を加えた場合の $T_{kn}(t)$ はそれぞれ

$$Z_{kn} = A_k \cos a_k p_n z + B_k \sin a_k p_n z \quad \text{----- (5)}$$

$$T_{kn} = -R_{kn} \int_0^t \ddot{g}(\tau) e^{-h_n p_n (t-\tau)} \sin p_n \sqrt{1-h_n^2} (t+\tau) d\tau \quad \text{----- (6)}$$

になる。ここに、 n 次モード展開係数 R_{kn} はモード型 Z_{kn} を用いて次式で求まる。

$$R_{kn} = \frac{1}{M_n} \int_0^1 F(z) Z_{kn}(z) dz \quad (0 \leq z = \frac{H_k - z}{l_k} \leq 1) \quad (7)$$

ただし、 M_n は直交条件を満たす n 次モード一般質量で $M_n = \int_0^1 Z_{kn}^2(z) dz$ で表わされる。

なお、式(5)の係数 A, B および固有振動数方程式は境界条件から決まる。各層の境界でその上層と下層の変位が等しく、剪断応力が相等しい。また自由表面では水平剪断応力が0で、基盤との境界では地盤に対して基盤を剛体と見做して相対変位を0とする。

四層地盤の場合の固有モード型は

$$Z_{1n}(z) = A \cos p_1 z \quad (0 \leq z < H_1) \quad (8)$$

$$Z_{2n}(z) = A \{ C_1 \cos p_2(z-H_1) - \alpha_1 S_1 \sin p_2(z-H_1) \} \quad (H_1 \leq z < H_2) \quad (9)$$

$$Z_{3n}(z) = A \{ (C_2 C_3 - \alpha_1 S_1 S_3) \cos p_3(z-H_2) - \alpha_2 (C_1 S_2 + \alpha_1 S_1 C_2) \sin p_3(z-H_2) \} \quad (H_2 \leq z < H_3) \quad (10)$$

$$Z_{4n}(z) = A \{ (C_1 C_3 C_4 - \alpha_1 S_1 S_3 C_4 - \alpha_2 C_1 S_2 S_3 - \alpha_3 \alpha_2 S_1 C_2 S_3) \sin p_4(H_4 - z) / S_4 \} \quad (H_3 \leq z < H_4) \quad (11)$$

になるが、 $l_k = H_k - H_{k-1}$, $p_k = q_k r_k$, $r_k = p_k l_k$, $\alpha_k = \sqrt{\rho_k G_k / \rho_{KH} G_{KH}}$, $S_k = \sin r_k$ として $C_k = \cos r_k$ が成り立っている。

固有モード型を計算するためには固有振動数 p_n を知る必要があるが、固有振動数方程式はやはり境界条件より誘導できる。単層、二層、三層そして四層地盤においてはそれぞれ

$$C_1 = 0 \quad (12) \quad C_1 C_2 - \alpha_1 S_1 S_2 = 0 \quad (13)$$

$$C_1 C_3 C_4 - \alpha_1 S_1 S_3 C_4 - \alpha_2 C_1 S_2 S_3 - \alpha_3 \alpha_2 S_1 C_2 S_3 = 0 \quad (14)$$

$$C_1 C_3 C_4 - \alpha_1 S_1 S_3 C_4 - \alpha_2 C_1 S_2 S_3 - \alpha_3 \alpha_2 S_1 C_2 S_3 - \alpha_3 \alpha_2 S_1 C_3 S_4 - \alpha_3 \alpha_3 C_1 S_3 C_3 S_4$$

$$+ \alpha_3 \alpha_1 S_1 S_3 S_4 - \alpha_3 \alpha_3 S_1 C_3 S_4 = 0 \quad (15)$$

となり層数に依って複雑な超越方程式になるため、一般には数値解法により根を求めている。

ii) 高次超越方程式の数値解法 - Newton の逐次近似法 -

$$\text{ある高次の超越方程式} \quad f(p_n) = 0 \quad (16)$$

の根を適当に p_{n1} とする。ただし、 p_{n1} は真の根にある程度近い値とする。このとき p_{n1} よりも真の根 p_n に近い値 p_{n2} は次式で表わされる。

$$p_{n2} = p_{n1} - \{ f(p_{n1}) / f'(p_{n1}) \} \quad (17)$$

ここに、 $f'(p_{n1})$ は $f(p_n)$ の微分係数の p_{n1} における値である。次に近似値 p_{n2} は

$$p_{n2} = p_{n1} - \{ f(p_{n1}) / f'(p_{n1}) \} \quad (18)$$

となるが、操作のくり返しを行えば必要な精度まで p_n の正しい値を求めることができる。根の精度は逐次2の累の等比級数で改良される。式(13)、(14)および(15)の振動数方程式の場合は根 p_n の正数値の小さなものより $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ と n 次まで計算される。

3. 軟弱多層地盤の地震応答解析

青森県津軽大橋(長泥橋)架設地実において、1968年末弾性波探査法による橋台部、橋桁部および地盤の振動測定が岩谷米、渡辺⁽²⁾等によって行われて、火華爆発によって発生する弾性波を解析した結果が⁽³⁾報告されている。それによると現地の地盤構造は大きく二層であるが四層まで考えられ、その弾性特性は表-1に示す通りであった。今三通りのモデルを考え、地下60mまでの地盤とみなして二層、三層そして四層の場合の固有モード型を上述の方法により計算し(図-1)に示した。

V_s	ρ	G
$\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$	$\frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$	$\frac{\text{kg}}{\text{cm sec}^2}$
0		
4.5	1.4	2.84
$\times 10^3$	$\times 10^{-3}$	$\times 10^4$
1.4	1.8	3.53
$\times 10^4$	$\times 10^{-3}$	$\times 10^5$
2.0	2.0	8.00
$\times 10^4$	$\times 10^{-3}$	$\times 10^5$
50		
3.0	2.2	1.98
$\times 10^4$	$\times 10^{-3}$	$\times 10^6$

Table 1

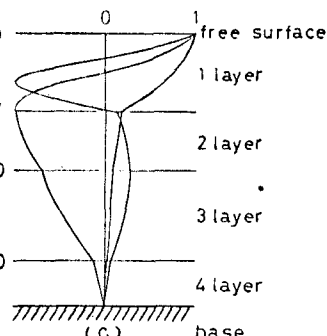
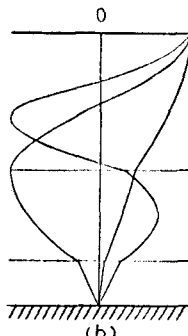
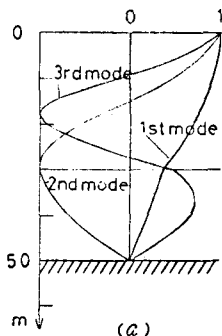


Fig 1

(a) と (b) の表層については表-1 の二層目の値、つまり $\rho = 1.8 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$ $G = 3.63 \times 10^5 \text{ kg/cm sec}^2$ および剪断波の速度 $V_s = 1.4 \times 10^4 \text{ cm/sec}$ で計算した。モード型は3次までのセット、固有周期は $T = 2\pi/\omega_n$ より求め、二層、三層および四層についてそれぞれ10次まで表-2に示した。

次に式(2)を使用して各層の応答計算を行ったが、前述の9次モード展開係数 $\hat{u}_n$ の収束の度合を考慮して30次まで計算にみ込んだ。そのうち、地中地震計(東京振動研究所製作 TM-3型地中地震計)で記録した小地震の一つ($\ddot{x}_{\text{max}} = 50 \text{ gal}$)

を強制外力として計算した絶対加速度応答波形を図-2に示しておく。これを見ると地表と地下10mでの波形そして地下20mと30mでの波形はそれぞれ相似な部分がみられるが他は別々な応答波形を示していることが容易に判るが、これは層の弾性特性が違うための影響であらう。

しかし、応答波形をスペクトル解析で周期分析してみると $0.6 \sim 0.7 \text{ sec}$ 近傍がかなりピークになっているので表-1の四層における2次振動が卓越しているとみてよさそう。

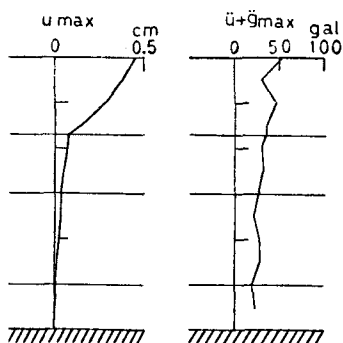


Fig 3

layer T_n	2	3	4
T1	1.126	1.173	1.707
T2	0.416	0.445	0.750
T3	0.258	0.270	0.492
T4	0.178	0.187	0.327
T5	0.139	0.152	0.278
T6	0.116	0.124	0.215
T7	0.096	0.106	0.178
T8	0.083	0.093	0.165
T9	0.046	0.051	0.139
T10	0.066	0.073	0.128

Natural Period (sec)

Table 2

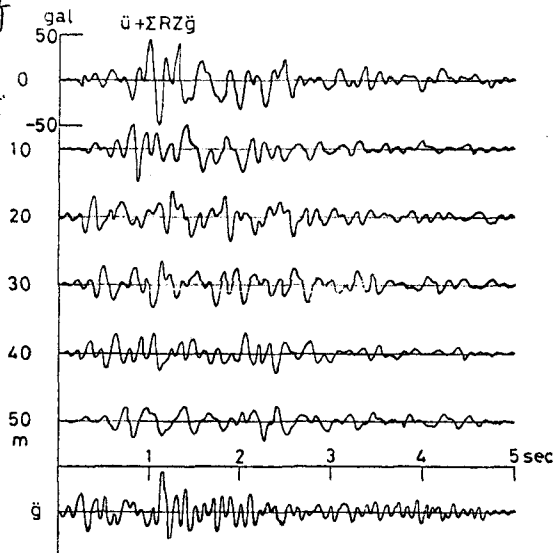


Fig 2

また、相対変位および絶対加速度の応答波のうち最大値のみプロットすると図-3に示す通りになる。相対変位の場合は地表層部が支配的であるが絶対加速度の最大図は地中深部においてもかなりの振幅値をもっている。

4 分散性表面波より求めた地中の理論的な振幅分布

文献(3)の田治米等の報告によれば、小爆発実験の経験から表面波部を M_{II} 波、 M_{II} 波と考えて、理論的な分散曲線の試算を行なっている。地層のPoisson ratio が0.5に近い軟弱地盤層での弾性波記録ではI群(初動P波部)、II群(圧力波部)、III群(M_{II} 表面波部)およびIV群(M_{II} 表面波部)が顕著に表れるが、田治米はこのIII、IV群の表面波の分散曲線より四層地盤として地下構造を決定している。もちろんP波、S波および圧力波もあわせて考慮している。

また、 M_{II} 波の地中における理論的な振幅分布を計算し図-4のごとく示した。奥測された波群の周期の中では最大周期に近い位相の振幅分布のみ計算してあるが、図をみるとIV群の大半のエネルギーが最表層部に貯えられている。ここで T 、 H はそれぞれ鉛直、水平振幅を示す。

そしてこの振幅分布と図-1に示したモード型を比較してみると1次あるいは2次のモードに一致する。しかも最表層部の振幅が圧倒的に大きいことから表面波のエネルギーは地中深部には影響していないことは明確である。しかし図-1の固有モード型は2次、3次のモードでも最表層部比べて特に振幅が小さくなっているわけではない。

さて振動周期を考えると、図-4では $T=0.635$ secのものであるが、これは表-1の固有周期でいえば四層地盤について2次($T_2=0.750$ sec)、3次($T_3=0.492$ sec)に近い値である。

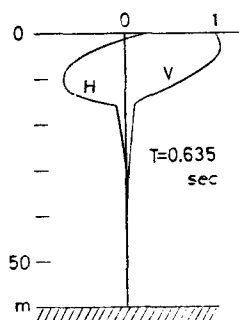


Fig 4

5 あとがき

以上純粹な波動理論を用いず地盤を簡便なバネ系に置換する方法により、地盤の地震応答を数式的に表わした。IdrissとSeed⁽¹⁾は地盤の弾性特性が深さとともに変化する場合、つまり剪断弾性係数 G が深さ z との間に $G=Kz^b$ で変化する場合について述べているが、筆者は深さに対する弾性特性の相連を成層地盤で解決している。

数値計算には東大HITAC 5020および北大FACOM-230-60を使用した。

なお本文作成にあたり北大工学部震旦昇教授の種々の御助言に対し感謝致します。

参考文献

- 1) Idriss and Seed; 「Seismic Response of Horizontal Soil Layers」 1968
proc. of A. S. C. E
- 2) Ewing, Jardesky and Press; 「Elastic Waves in Layered Media」
MCGRAW-HILL Book Company inc.
- 3) 田治米 他; 「青森県長泥橋の橋脚の振動測定と地盤調査」 1969.2 北大地球物理学研究報告
第21号, 物理探査第2巻第1号
- 4) 渡辺金子; 「軟弱地盤の地震応答について」 1970 第5回土木学会年次学術講演会講演集
橋の