

京都大学 工学部 正員 山 田 善 一

○ (株)大林組技術研究所 正員 後 藤 洋 三

1. まえがき

海峡などを横断する橋梁の橋脚は、大きなケーソンからなる巨大な下部工上に背の高いピアーが設けられる場合が多い。このような構造物では、振動エネルギーの地下逸散、地盤の粘性塑性の影響を受けて下部工の振動減衰性が大きくなり、ピアーなどの上部工の減衰性は逆に小さいと考えられる。多質点系によるモード解析を行う場合、上部工と下部工を一体とすると、以上の理由から下部工の部分に特に大きな減衰を与えたモデルを解析しなければならない。この問題には一般のモード解析法は適用できず、複素固有値問題としての取扱いが必要となる。我々は複素固有値、固有ベクトルを求めるプログラムを開発し、下部に大きな減衰を有する橋脚のモード解析を行ってきたのでここにその結果を報告する。

2. 粘性減衰マトリックスと複素固有値問題

多質点系モデルにおいて、地下逸散減衰あるいは地盤の非線形材料減衰を考慮する方法としてはこれ等を近似的に等価な粘性減衰におきかえ、減衰係数マトリックスに含める方法が考えられる。すなわち、運動方程式

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = \{f\} \quad \text{—————(1)}$$

において、 $[C]$ は $[M]$ または $[K]$ の比例形、あるいはその組合せ、によらず任意の形として与えられる。この場合、 $[C]$ によるモード間の連成が問題となるが、連成を生じない $[C]$ の形状については、J.K.Canghey¹⁾が十分条件を与えている。その代表的形状は次の通りである。

$$[C] = z\beta\omega_i[M] \quad ; \quad z\beta_i = \frac{z\beta\omega_i}{\omega_i} \quad \text{—————(2)}$$

$$[C] = \frac{z\beta}{\omega_i} [K] \quad ; \quad z\beta_i = \frac{z\beta}{\omega_i} \cdot \omega_i \quad \text{—————(3)}$$

$$[C] = z\beta[M]^{\frac{1}{2}} \cdot \{[M]^{\frac{1}{2}} \cdot [K] \cdot [M]^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}} \cdot [M]^{\frac{1}{2}} ; z\beta_i = z\beta \quad \text{—————(4)}$$

(2)式においては各モードの減衰定数 β_i は固有振動数に比例し、(3)式では逆比例する。(4)式では振動数に関係なく一定である。 $[C]$ としては(2)、(3)式がよく用いられるようである。

さて、図-1に示すような長大つり橋主橋脚の一例を図-2のようにモデル化することを考える。ケーソンの慣性と支持バネに対応して等価粘性減衰のダンパーが取付けられる。この場合、3自由度以上になると $[C]$ は上記(2)、(3)、(4)式の組合せでは表現できない。従って連成が生じる場合の解析が必要となり一般のモード解析法は適用できず、複素固有値問題として取扱う。複素固有値問題では虚数領域まで考えるため、倍の自由度を持つ方程式が必要である。

長大橋橋脚

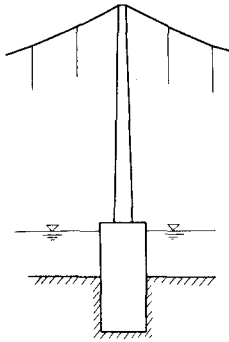


図-1

質点系モデル

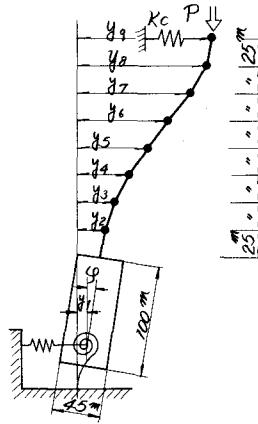


図-2

ディメンション

$P = 1.14 \times 10^4 t$	$K_C = 1.89 \times 10^4 t/m$
$m_9 = 177 t$	$I_9 = 0$
$m_8 = 455$	$I_8 = 6.7 m^4$
$m_7 = 585$	$I_7 = 11.0$
$m_6 = 731$	$I_6 = 17.2$
$m_5 = 893$	$I_5 = 25.6$
$m_4 = 1071$	$I_4 = 36.9$
$m_3 = 1266$	$I_3 = 51.4$
$m_2 = 1476$	$I_2 = 70.0$
	$I_1 = 93.2$

$$K_U = 0.2 \sim 3.0 \times 10^4 t/m^3$$

$$K_h = 0.925 \times 10^5 t/m^3$$

ゲソン興行 60m

すなわち (1) 式は次のように書きかえられる。

$$\begin{bmatrix} 0 & [M] \\ [M] & [C] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -[M] & 0 \\ 0 & [K] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} [A] &= \begin{bmatrix} 0 & [M] \\ [M] & [C] \end{bmatrix} & [B] &= \begin{bmatrix} -[M] & 0 \\ 0 & [K] \end{bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \dot{y} \\ y \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} p \\ \bar{p} \end{Bmatrix} e^{pt} & \{F\} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ f \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad \text{とすると}$$

Homogeneous Equation は

$$p[A] \begin{Bmatrix} p \\ \bar{p} \end{Bmatrix} + [B] \begin{Bmatrix} p \\ \bar{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$$[A]^{-1} \text{ をかけ } [D] = [A]^{-1} \cdot [B] \text{ とすれば}$$

$$p \begin{Bmatrix} p \\ \bar{p} \end{Bmatrix} + [D] \begin{Bmatrix} p \\ \bar{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

(7) 式は固有値問題の形式となるが、 $[C]$ の形状により固有値の数と求まる領域が変化する。一般に (1) 式が N 元のマトリックスから構成されている場合には、(7) 式は $2N$ 個の固有値と固有ベクトルを与える。振動問題では固有値は N 組の共役複素数からなり、実部は減衰性を虚部は角振動数を与える。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} p(i) &= -\beta(i) + i\omega(i) & \bar{p}(i) &= -\beta(i) - i\omega(i) \\ \begin{Bmatrix} \bar{p} \end{Bmatrix}^{(i)} &= \begin{Bmatrix} \bar{\psi} \end{Bmatrix}^{(i)} + i \begin{Bmatrix} \bar{\eta} \end{Bmatrix}^{(i)} & \begin{Bmatrix} \bar{p} \end{Bmatrix}^{(i)} &= \begin{Bmatrix} \bar{\psi} \end{Bmatrix}^{(i)} - i \begin{Bmatrix} \bar{\eta} \end{Bmatrix}^{(i)} \\ \begin{Bmatrix} \psi \end{Bmatrix}^{(i)} &= \left[\begin{Bmatrix} \psi \end{Bmatrix}^{(i)} \pm i \begin{Bmatrix} \eta \end{Bmatrix}^{(i)} \right] \cdot e^{(-\beta(i) \pm i\omega(i))t} \end{aligned} \right\} \quad \text{とすれば} \quad (8)$$

$$\therefore \{y\}^{(i)} = z \cdot e^{-\beta^{(i)}t} \left\{ \{u\}^{(i)} \cdot \cos \omega^{(i)}t - \{v\}^{(i)} \cdot \sin \omega^{(i)}t \right\} \quad (9)$$

従って i 次モードによる j 節点の変位は

$$y_j^{(i)} = z \cdot e^{-\beta^{(i)}t} \cdot x_j^{(i)} \cdot \cos(\omega^{(i)}t + \theta_j^{(i)}) \quad (10)$$

ただし、

$$x_j^{(i)} = \sqrt{u_j^{(i)2} + v_j^{(i)2}} \quad \theta_j^{(i)} = \tan^{-1} \frac{v_j^{(i)}}{u_j^{(i)}}$$

ここに $x_j^{(i)}$ は i 次モードの最大値（複素数の絶対値）、 $\theta_j^{(i)}$ は i 次モード内の位相差（偏角）を示す。

3. 複素固有値問題の数値解法と解析例

(7) 式の数値解を求めるに当って我々は Companion 行列法によって $|D|$ を多項式に展開し、Iteration を用いてその根を求める方法をとった。

今回の計算に用いた $[C]$ は、基礎部に大きな減衰を与えた場合の影響を調べるのが目的であったので、以下に示す方法によって作成した。

$$\begin{aligned} [C] &= [\tilde{M}] = z\beta_1\omega_1[M] + z(\beta_2 - \beta_1)\omega_1 \begin{bmatrix} 0 & \\ & m \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & \\ & m \end{bmatrix} ; \text{基礎の慣性項のみのマトリックス} \\ \text{or} \quad [C] &= [\tilde{K}] = \frac{z\beta_1}{\omega_1}[K] + \frac{z(\beta_2 - \beta_1)}{\omega_1} \begin{bmatrix} 0 & \\ & k \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & \\ & k \end{bmatrix} ; \text{地盤のバネのみからなるマトリックス} \\ \text{or} \quad [C] &= [\tilde{M}]^{\frac{1}{2}} \left\{ [M]^{-\frac{1}{2}} \cdot [\tilde{K}] \cdot [\tilde{M}]^{-\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} [\tilde{M}]^{\frac{1}{2}} \quad \omega_1 ; \text{1次の固有振動数} \\ & \quad \beta_1, \beta_2 ; \text{上部, 下部の減衰率} \end{aligned}$$

図-2に示したモデルについて、3種の地盤係数につき、非減衰時のモードを求めたものを図-3に示す。表-1には下部の減衰を大きく取っていった場合の各次のモードの振動数と減衰常数を示した。計算誤差のため値のバラツキがみられるが、図-3と対応すると下部工であるケーソン部分が大きく振れるモードに下部の減衰効果が集中してあらわれているのがわかる。図-4には表-1の $K_v = 0.925 \times 10^4 \text{ t/m}^2$; 1次モードの場合について、モード最大値（複素モードの絶対値）とモード内の位相差（偏角）を示す。図中位相差はケーソン項部を 0° とし 360° の円座標で表示してある。図から下部の減衰効果はモード最大値に影響を与えないが位相差に大きく影響することがわかる。

参考文献

- 1) T.K.Caughey; "Classical Normal modes in Damped Linear Dynamic Systems" Journal of Applied Mechanics, June 1960
- K.A.Foss; "Co-Ordinates Which Uncouple the Equations of Motion of Damped Linear Dynamic Systems" Journal of Applied Mechanics, Sept. 1958
- 高橋利衛; "振動工学演習(Ⅱ)" オーム社

非減衰振動モード

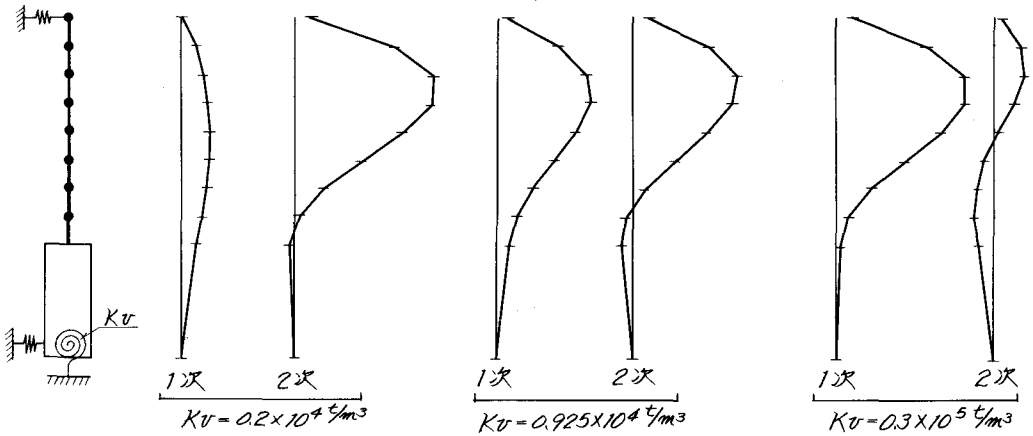


図-3

$[C] = [M]^{1/2} \cdot \{ [M]^{-1/2} \cdot [K] \cdot [M]^{-1/2} \} \cdot [M]^{1/2}$										
地盤係数	モード 次数	$\beta_1, \beta_2 = 0.0$ ω	$\beta_1 = 0.02, \beta_2 = 0.02$ ω	β	$\beta_1 = 0.02, \beta_2 = 0.05$ ω	β	$\beta_1 = 0.02, \beta_2 = 0.10$ ω	β	$\beta_1 = 0.02, \beta_2 = 0.20$ ω	β
$Kv = 0.2 \times 10^4 \text{ t/m}^3$	1次	2.228	2.228	.0185	2.226	.0471	2.222	.0949	2.190	.1929
	2次	4.975	4.974	.0084	4.974	.0093	4.973	.0105	4.970	.0128
	3次	13.387	13.386	.0155	13.386	.0156	13.386	.0157	13.386	.0159
$Kv = 0.925 \times 10^4 \text{ t/m}^3$	1次	4.421	4.420	.0163	4.425	.0308	4.456	.0553	4.716	.1047
	2次	5.326	5.326	.0185	5.316	.0332	5.268	.0557	4.939	.1078
	3次	13.394	13.392	.0176	13.392	.0178	13.392	.0180	13.390	.0185
$Kv = 0.3 \times 10^5 \text{ t/m}^3$	1次	4.832	4.831	.0147	4.831	.0150	4.831	.0155	4.833	.0165
	2次	8.709	8.708	.0199	8.699	.0488	8.670	.0974	8.550	.1973
	3次	13.430	13.428	.0177	13.427	.0182	13.424	.0190	13.412	.0204

表-1

減衰時モード最大値 および 位相差 (ケーソン頂部を基準としている)

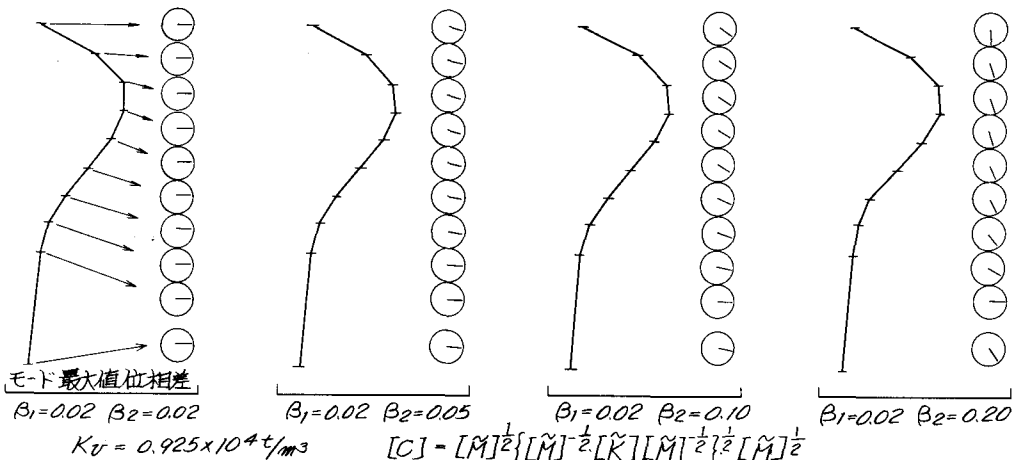


図-4