

福山コンサルタント 正員 O. 田中純輔
山口大学工学部 正員 中川建彦

1 まえがき

図-1 に示すような塔状構造物の動的応答の解析方法として、偏微分方程式で表わされた運動方程式を x 方向 (撓軸方向) には階差式を適用して常微分方程式に変換する方法を採用する。

著者は、曲げ (あるいはせん断) 抵抗を起して有効に作用する構造物の有効部材の総面積 V を一定にする条件のもとに固有周期 $T_i (i=1, 2, \dots)$ の自乗和 $\Gamma = \sum T_i^2$ を最小にする断面設計法を導いた (文献1) 各紙)。このような断面変化を有する構造物は、特殊な地震波に対する曲げ応力度応答を各断面で均一化するものであることを示す。さらに、等断面構造物の曲げ応力度応答が均一化されたのは、どのようなスペクトルを有する地震波であることを示す。

2 行列表示

図-1 に示すような曲げ振動を起す構造物を対象とする。地震加速度 $\ddot{z}(t)$ に対する応答 $y(t)$ (基礎に対する相対変位) は、つぎの微分方程式の解である。

$$[m]\{\ddot{y}\} + [R]\{\dot{y}\} + [S]\{y\} = -[m]\ddot{z} \quad \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 $[m]$ は各点の集中質量 $m_i = W_i/g$ を対角要素とする対角行列、 $[R]$ は減衰力特性を表わし、 $[S]$ は復元力特性を表わす *Stiffness Matrix* である。 $[S]$ をさらに行列の積に分解し、固有値行列 $[\lambda]$ と固有モード $[\psi]$ と関連させるとつぎのようになる。

I_i : 断面2次モーメント

Z_i : 断面係数

h : 区間長

$$[G] = \begin{bmatrix} \frac{EI_0}{EI_1} & 0 \\ 0 & \frac{EI_{n-1}}{EI_n} \end{bmatrix} \quad [Z] = \begin{bmatrix} Z_0 & 0 \\ 0 & Z_{n-1} \end{bmatrix} \quad [\sqrt{m}] = \begin{bmatrix} \sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{m_n} \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1-2 & 1 \end{bmatrix} \quad [D] = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} [S] &= \frac{1}{h^3} [B]^T [D] [G] [D] [B] \\ [S]^T &= h^3 [B] [D]^T [G]^T [D]^T [B]^T \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

$$\left. \begin{aligned} [\psi]^T [S] [\psi] &= [\lambda] \\ [\psi]^T [m] [\psi] &= [E] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

$$\left. \begin{aligned} [\phi] &= [\sqrt{m}] [\psi] \\ [\phi]^T [\phi] &= [E] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

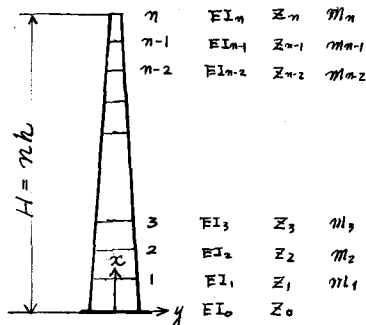


図-1

3. 動的応答 (応力度自乗和) その1 $[y] = [\psi][\lambda]^{-1}$

動的変位応答 $\{y\}$ として、各モード $\{\psi\}_i$ に振幅比としてそのモードに対応した固有値 λ_i の逆数を用いたもの $\frac{1}{\lambda_i} \{\psi\}_i$ を仮定する。これは、 $T_i = 2\pi/\sqrt{\lambda_i}$ という関係より、 $T_i^2 \{\psi\}_i$ を仮定したことに等しい。この応答より各点の曲げ応力度を求めよには、 $\{\sigma\} = [G][D]^2[B]\{y\}/h$ による。

さて、 j モード応答 $\frac{1}{\lambda_j} \{\psi\}_j$ による j 点の曲げ応力度を σ_{ij} として、 $U_i = \sum_j \sigma_{ij}^2$ を求めて、 U_i をすべて一定にできるようにする。これは、つぎのような行列考慮によって求められる。

$$U = \sum_{j=1}^n U_i = \text{tr} [\sigma_j^T [\sigma_j] \quad , \quad [y] = [\psi][\lambda]^{-1} = [S]^{-1} [\sqrt{m}][\phi] \quad \dots (5)$$

$$[\sigma_j] = \frac{1}{h} [G][D]^2 [B]$$

$$\therefore U = \frac{1}{h^2} \text{tr} [(\phi)^T [\sqrt{m}][S]^{-1} [B]^T [D]^2 [G][Z]^{-2} [G][D]^2 [B][S]^{-1} [\sqrt{m}][\phi]]$$

$$= h^2 \text{tr} [(\sqrt{m})[B]^{-1}[Z]^{-2}[B]^{-1}[\sqrt{m}]]$$

$$= h^2 \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_{j+1}}{Z_j^2} \quad \dots (6)$$

$$\alpha_j = \sum_{k=1}^n m_k (k-j+1)^2 \quad \dots (7)$$

$$\therefore U_i = h^2 \alpha_{i+1} / Z_i^2 \quad \dots (8)$$

よって、 U_i を一定にするには $\alpha_{i+1} / Z_i^2 = \text{const}$ にすればよい。

集中質量 m_i には、有効断面によるものと、付属物などの実効断面によるものがあるが、 m_k を仮定して、式(7)の α_k を求めると、 $U_i = \text{const}$ の解は、

$$\left. \begin{aligned} Z_i &= c_i t_i^d && \text{断面係数} \\ V &= h \sum_{j=1}^n r_j t_j^b && \text{有効断面積} \end{aligned} \right\} \text{のとき、} \quad t_j = \left\{ \frac{V}{h \sum_{i=1}^n r_i (\alpha_{i+1}/c_i^2)^b} \right\}^{1/b} \left(\frac{\alpha_{j+1}}{c_j^2} \right)^{1/2d} \quad \dots (9)$$

となる。 $\sum T_i^2 = T$ を満たす断面形状は、文献1)の結果より

$$\left. \begin{aligned} I_i &= c_i^d t_i^{d'} && \text{断面2次モーメント} \\ V &= h \sum_{j=1}^n r_j t_j^b \end{aligned} \right\} \text{のとき、} \quad t_j' = \left[\frac{V}{h \sum_{i=1}^n r_i (\alpha_{i+1}/r_i c_i^2)^{b/b+d'}} \right]^{1/b} \left(\frac{\alpha_{j+1}}{r_j c_j^2} \right)^{1/(b+d')} \quad \dots (10)$$

となる。一般に、 $2d = b + d'$ となって、 $t_j' \propto t_j$ となる。 t_j は断面変化を示すパラメーター (例えば、煙突の板厚) である。

4 動的応答 その2. $[y] = [\psi][\lambda]^{-1/2}$

各モード応答の振幅比を $T_i \propto \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$ として、 $\{y\} = \{\psi\}_i \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$ とすれば、上記の演算方法より

$$U = \sum_{j=1}^n U_i, \quad U_i = \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}^2 = \frac{1}{h^2} \frac{E I_i}{Z_i^2} \quad \dots (11)$$

を得る。一般に $I_i / Z_i^2 = \text{const}$ であるためには、各断面でなければならない。

5 計算例

計算例として、中部電力旧日市火力発電所の高さ120mの鋼製煙突を対象にして、実断面と $T_{\min}(U_i = \text{const})$ の断面形状を比較した。

参考文献 1) 中川：塔状構造物の固有周期—土木学会論文報告集第169号、1969年9月。

