

I-162 重量及び車頭間隔が不規則な分布をなす道路橋の応答解析

早稲田大学

正員 工博 半島政治

首都高速道路公団 〇正員 工修 多田一正

1. よんがき

道路橋に作用する活荷重は、重量及び、車頭間隔が不規則な分布をなす不確定的要素であり、従ってその応答も又確率統計的な分布を示す。最近の電子計算機の急速な発達に伴い、構造解析の精度は上昇しながら、その解析の前提となる外力は決定論的に与えられる場合が多い。一般に、土木構造物に作用する外力は確率的にしか論じる事の出来ないものが多く、しかも対象とする系それ自身が不確定要素を含む場合もある。本文は、重量及び車頭間隔と不規則な分布をなした場合に於ける、道路橋のタワミの平均自乗応答を求めに。

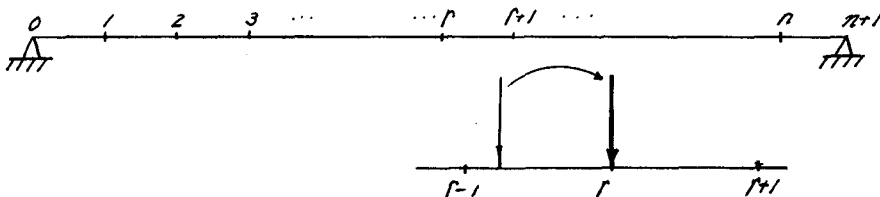
仮定

1. 道路橋を通過する自動車は一定速度で走行する。
2. 自動車は剛体とし、バネ上質量による衝撃効果を考えていない。
3. 定常的不規則振動として解析しに。
4. 振動系は線型系とする

2. 解析の方法

移動荷重の位置

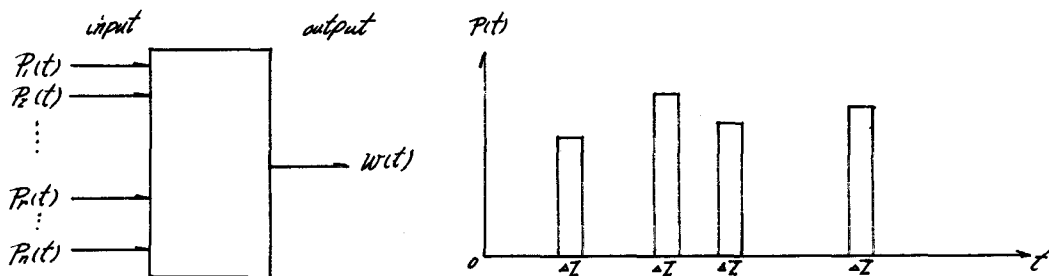
スパンを $n+1$ 個の等間隔に分割する。走行荷重が区間 $r-1$ と r の間に存在する場合には、区間内に作用せず、断面 r に荷重を一時的に固定させる。断面 r を通過しに行けば、 $r+1$ 断面に固定させる。但し、分割区間内に同時に2台以上の車両は存在しないものとする。



このように荷重の作用位置を決めるならば、系は見かけ上、 n 個の入力源を有する多入力系と考えられるが、 $0 \sim 1$ 区間に存在する荷重を知ることによって、他の区間の荷重は $0 \sim 1$ 区間のものを時間的に平行移動して断面上にあることがわかる。

$$P_r(t) = P \{ x - (r-1)\Delta t \}$$

$$\Delta t = \frac{L}{v} = \frac{L}{m \cdot v} \quad ; \text{移動荷重 } G \text{ の分割点から次の分割点まで走行する時間}$$



このように移動荷重の作用位置を考えるならば、荷重～時間図はパルス波となり、作用時間 ΔT 、その大きさ J (車両重量) 及び、休止間隔 (車頭間隔) は確率過程をなす。振動系は多入力系であるから入力側のクロスパワー・スペクトルの重ね合わせとして出力を表現せねばならない。

$$S_w(f) = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \alpha_{rP}^* \cdot \alpha_{sP} \cdot S_{P_r P_s}(f)$$

$S_w(f)$: 出力 (973) のスペクトル
 $S_{P_r P_s}$: 入力側のクロススペクトル
 α_{rP} : P に r 点の重しを r 与える
 $*$: 複素共役

$$S_{P_r P_s}(f) = 2 \int_0^\infty R_{P_r P_s}(\tau) \exp(-i2\pi f\tau) d\tau$$

$$R_{P_r P_s}(\tau) = \langle P_r(t) P_s(t+\tau) \rangle = \langle P_r\{t - (r-1)\Delta T\} \cdot P_s\{t - (s-1)\Delta T + \tau\} \rangle$$

= $R_{P_r}\{(r-s)\Delta T + \tau\}$ (定常的であるという仮定による。)

$$\begin{aligned} S_{P_r P_s} &= 2 \int_0^\infty R_{P_r P_s} \exp(-i2\pi f\tau) d\tau = 2 \int_0^\infty R_{P_r}\{(r-s)\Delta T + \tau\} \exp(-i2\pi f\tau) d\tau \\ &= \exp\{i2\pi f(r-s)\Delta T\} \cdot 2 \int_0^\infty \{R_{P_r}\{(r-s)\Delta T + \tau\} \exp(-i2\pi f(r-s)\Delta T + i2\pi f\tau)\} d((r-s)\Delta T + \tau) \\ &= \exp(i2\pi f(r-s)\Delta T) \cdot S_{P_r}(f) \end{aligned}$$

従って

$$S_w(f) = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \left[\exp(i2\pi f(r-s)\Delta T) \cdot S_{P_r}(f) \cdot \alpha_{rP}^* \cdot \alpha_{sP} \right]$$

973 の平均自乗応答は

$$\begin{aligned} \langle w^2(x, t) \rangle &= \int_0^\infty \left\{ \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \alpha_{rP}^* \alpha_{sP} \exp(-i2\pi f(r-s)\Delta T) \cdot S_{P_r}(f) \right\} df \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left\{ \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \alpha_{rP}^* \alpha_{sP} \exp\{i\omega(r-s)\Delta T\} \cdot S_{P_r}(\omega) \right\} d\omega \end{aligned}$$

粘性減衰を有する単純支持桁に対して、正規モード法により変位の応答を求める。

$$w(x, t) = P_0 \exp i\omega t \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{\phi_j(x) \cdot \phi_j(x_0)}{M_j \cdot \omega_j^2} \cdot \frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_j})^2 + 2i\zeta_j \frac{\omega}{\omega_j}} \right]$$

$$\alpha_{rP} = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{\phi_j(x) \phi_j(x_0)}{M_j \cdot \omega_j^2} \cdot \frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_j})^2 + 2i\zeta_j \frac{\omega}{\omega_j}} \right]$$

$$\langle w^2(x, t) \rangle = \frac{4}{\pi^2 L^2} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \left[\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi_j(x) \phi_k(x) \phi_j(x_0) \phi_k(x_0)}{\omega_j^2 \cdot \omega_k^2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty (H_j^*(\omega) H_k(\omega)) e^{i\omega(r-s)\Delta T} S_P(\omega) d\omega \right]$$

近似 ① 周波数応答の位相の関係を無視

② 減衰は小

により

$$\langle w^2(x, t) \rangle = \frac{1}{\pi^2 L^2} \sum_{j=1}^{\infty} S_P(\omega_j) \frac{\phi_j^2(x)}{\omega_j^4} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n e^{i\omega_j(r-s)\Delta T} \cdot \phi_j^2(x_0)$$

$$\omega_j \cdot 2\pi = \alpha_j, \quad \phi_j(x_1) = J_1, \quad \phi_j(x_2) = J_2 \quad \text{とあ'て'る}$$

$$\langle \omega^2(x, t) \rangle$$

$$= \frac{1}{m^2 L^2} \sum_{j=1}^{\infty} S_p(\omega_j) \cdot \frac{\phi_j^2(x)}{\omega_j^2} \cdot A_j$$

但し

$$A_j = J_1 \cdot J_1 + J_1 \cdot J_2 \cdot e^{-i\alpha_j} + J_1 \cdot J_2 \cdot e^{-2i\alpha_j} + \dots + J_1 \cdot J_n \cdot e^{-i(n-1)\alpha_j} \\ + J_2 \cdot J_1 \cdot e^{i\alpha_j} + J_2 \cdot J_2 + J_2 \cdot J_2 \cdot e^{-i\alpha_j} + \dots + J_2 \cdot J_n \cdot e^{-i(n-2)\alpha_j}$$

$$+ J_3 \cdot J_1 \cdot e^{i(n-1)\alpha_j} + J_n \cdot J_2 \cdot e^{i(n-2)\alpha_j} + J_n \cdot J_2 \cdot e^{i(n-3)\alpha_j} + \dots + J_n \cdot J_n$$

$$= \sin^2 \beta_j' + 2 \sin \beta_j' \cdot \sin 2\beta_j' \cdot \cos \alpha_j' + 2 \sin \beta_j' \cdot \sin 3\beta_j' \cdot \cos 2\alpha_j' + \dots + 2 \sin \beta_j' \cdot \sin n\beta_j' \cdot \cos (n-1)\alpha_j' \\ + \sin^2 2\beta_j' + 2 \sin 2\beta_j' \cdot \sin 3\beta_j' \cdot \cos \alpha_j' + \dots + 2 \sin 2\beta_j' \cdot \sin n\beta_j' \cdot \cos (n-2)\alpha_j' \\ + \sin^2 3\beta_j' + \dots + 2 \sin 3\beta_j' \cdot \sin n\beta_j' \cdot \cos (n-3)\alpha_j' \\ \vdots \\ \sin^2 n\beta_j'$$

$$\beta_j' = \frac{j\pi}{n+1}$$

この級数は極めて収束が遅いので第1項だけをとって近似してみよう

$$\langle \omega^2(x, t) \rangle = \frac{L^4}{\pi^6 \sqrt{m} (\sqrt{EL})^3} \cdot S_p \left(\omega_1 = \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EL}{m}} \right) \sin^2 \frac{\pi x}{L} \cdot A_1$$

従って 0~1 区間に存在する荷重に対するパワースペクトルを求めるならば、平均自乗応答は上式から計算することができる。

S_p は一般には道路橋の存在する地域の特性、交通流の性格により定まるものであるが、大体の性格を知る為に、特別な場合について求めてみる。

時間 τ の間に k 個の車輛が 0~1 区間を通過する確率が Poisson 分布に従うものと仮定する

$$P_r(k, \tau) = \frac{(a\tau)^k}{k!} \exp(-a\tau)$$

a : 単位時間に通過する平均台数

荷重の大きさは一定とし、車頭間隔のみが Poisson 分布しているならば、パルス波は次のようになる。

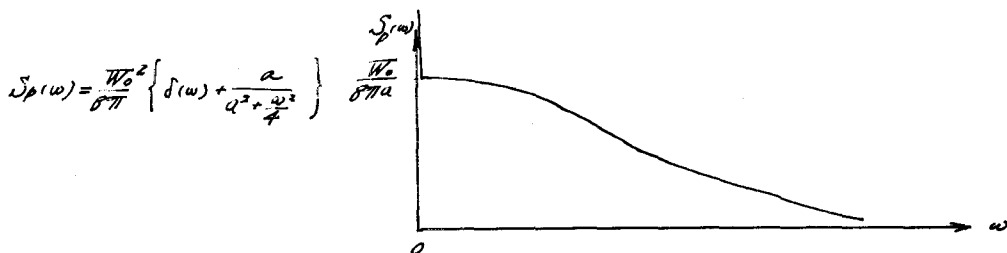


$P_r(k, \tau) = \frac{(a\tau)^k}{k!} \exp(-a\tau)$ を用いて 自己相関数を求め、更にそれをフーリエ変換すれば

$$R_x(\tau) = \frac{W_0^2}{2} [1 + \exp(-2a|\tau|)]$$

$$S_p(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau \\ = \frac{W_0^2}{8\pi} \delta(\omega) + \frac{W_0^2}{8\pi} \frac{a}{a^2 + \frac{\omega^2}{4}}$$

$\delta(\omega)$: Dirac の δ 函数



$$\langle W^2(x, t) \rangle$$

$$= \frac{L^4}{\pi^2 \sqrt{m} (EI)^{\frac{3}{2}}} \frac{W_0^2}{8\pi^2} \frac{a}{a^2 + \frac{\pi^4 EI}{4mL^4}} \cdot \sin^2 \frac{\pi x}{L} \cdot A.$$

スパン中央点のワタミ

$$\langle W^2(\frac{L}{2}, t) \rangle = \frac{L^4 \cdot W_0^2}{8\pi^2 \sqrt{m} \frac{1}{2} (EI)^{\frac{3}{2}}} \frac{a}{a^2 + \frac{\pi^4 EI}{4mL^4}} \cdot A.$$

3. 後述

本又は定常的不規則振動の考え方によし、不規則な車荷重による道路橋の応答解析を求め
 (みに)。くり返し応力を受ける道路橋の耐荷力をどのように評価し、その非破壊確率を求める
 足がかりとし、上記の如き荷重分配により平均値応答を計算しに。
 交通流理論における、出現自動車荷重の確率的分布に、質的の意味を加えに状態で、構造解
 析における外力を合理的に評価する必要がある。

参考文献

"橋梁構造の振動減衰" 伊藤孝・片山恒雄 土木学会論文 No. 117

"ランダム自動車荷重列による道路橋の衝撃に関する研究"

山田善一・小堀為雄 土木学会論文 No. 119

"An introduction to the theory of Random Signals and Noise"
 W.B. Davenport, W.L. Root.