I-151　曲げ－捩れフラッタ解析における準定常空気力について

九州大学応用力学研究所　土木学会正員　中村泰治

二次元非圧縮流における平板翼の曲げ－捩れフラッタ解析において，種々の近似空気力を適用し，その結果を比較検討する．いわゆる準定常空気力を用いた解析は著しく低いフラッタ速度を与え，むしろ，定常空気力を用いた解析の方がはるかに近似がよい．これをまず，数値例により示す．ついでその原因を考察し，準定常空気力理論がフラッタ解析における近似理論として大きい欠陥を有することを指摘し，あわせて定常空気力による解析がより合理的である所以を示す．ここで，準定常空気力とは，何等かの意味で流れの遅れを無視する振動空気力を指す．平板翼では，Theodorsen 函数 $C(k)=F(k)+iG(k)$（wake vortex の影響）において，$G(k)=0$ とする．

1. 運動方程式

翼の運動は空力中心A.C.の変位 h，α で表わす．

$$m\ddot{h}+m(d+x_\alpha)\ddot{\alpha}+S_h(h+d\alpha)=-L \qquad (1)$$

$$I_0\ddot{\alpha}+m(d+x_\alpha)\ddot{h}+S_h(h+d\alpha)d+S_\alpha\alpha=M_\alpha \qquad (2)$$

2. 近似空気力

振動平板翼に対する種々の近似空気力を以下に列挙する．但し，case 1 は Theodorsen の空気力で，比較の基礎となる厳密解である．

Case 1.（Theodorsen の空気力）

$$\begin{cases} L=\pi\rho U^2 b\left(\dfrac{b\dot{\alpha}}{U}\right)+2\pi\rho U^2 bC(k)\left(\dfrac{\dot{h}}{U}+\alpha+\dfrac{b\dot{\alpha}}{U}\right) & (3)\\ M_\alpha=-\pi\rho U^2 b^2\left(\dfrac{b\dot{\alpha}}{U}\right) & (4)\end{cases}$$

但し，加速度 $\ddot{h}$，$\ddot{\alpha}$ による項は無視する．

Case 2.

空力中心に定常揚力係数と幾何学的迎角より表わされる揚力のみ作用する．

$$\begin{cases} L=2\pi\rho U^2 b\alpha & (5)\\ M_\alpha=0 & (6)\end{cases}$$

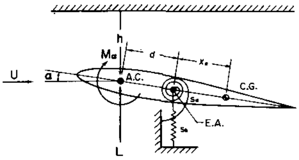
Case 3.

Case 2 における幾何学的迎角の代わりに，空力中心における有効迎角 $\left(\dfrac{\dot{h}}{U}+\alpha\right)$ を用いる．

$$\begin{cases} L=2\pi\rho U^2 b\left(\dfrac{\dot{h}}{U}+\alpha\right) & (7)\\ M_\alpha=0 & (8)\end{cases}$$

Case 4.

いわゆる準定常空気力と呼ばれるもので，厳密解 case 1 において，$C(k)=1$ とおいたもの．



第 1 図

$$\begin{cases} L=\pi\rho U^2 b\left(\dfrac{b\dot{\alpha}}{U}\right)+2\pi\rho U^2 b\left(\dfrac{\dot{h}}{U}+\alpha+\dfrac{b\dot{\alpha}}{U}\right) & (9)\\ M_\alpha=-\pi\rho U^2 b^2\left(\dfrac{b\dot{\alpha}}{U}\right) & (10)\end{cases}$$

Case 5.

Case 4 の近似を高める目的で Theodorsen 函数の絶対値の変化を考慮．

$C(k)$ の内，$G(k)=0$．

$$\begin{cases} L=\pi\rho U^2 b\left(\dfrac{b\dot{\alpha}}{U}\right)+2\pi\rho U^2 bF(k)\left(\dfrac{\dot{h}}{U}+\alpha+\dfrac{b\dot{\alpha}}{U}\right) & (11)\\ M_\alpha=-\pi\rho U^2 b^2\left(\dfrac{b\dot{\alpha}}{U}\right) & (12)\end{cases}$$

3. フラッタ解析

運動方程式に上記の空気力を代入し，フラッタ方程式（特性方程式）を得る．これを実部，虚部の二つの方程式に分ける．Case 1 を例にとり示すと，

実部方程式：

$$\begin{aligned}&\sigma^4\Big\{(1-x^2)+\frac{2G(k)}{\mu k}\left[(\gamma+x)^2+(1-x^2)\right]-\frac{2F(k)}{\mu^2\beta^2k^2}\\&\qquad+\frac{2}{\mu\beta k^2}(\gamma+x)\left[F(k)-kG(k)\right]\Big\}\\&-\sigma^2\Big\{(1+R^2)+\frac{2G(k)}{\mu k}(1+\gamma^2R^2)+\frac{2\gamma R^2}{\mu\beta k^2}\left[F(k)-kG(k)\right]\Big\}\\&+R^2=0\end{aligned} \qquad (13)$$

虚部方程式：

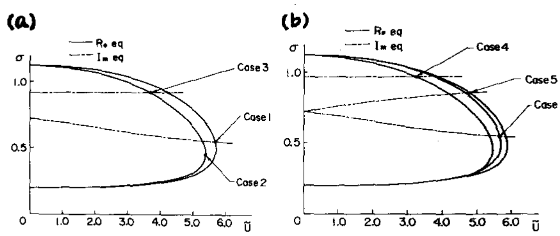
$$\sigma^2=\frac{F(k)(1+\gamma^2R^2)+\frac{R^2}{2\beta}-\gamma R^2\left[\frac{1}{2}+F(k)+\frac{G(k)}{k}\right]}{F(k)\beta\left[(\gamma+X)^2+(1-X^2)\right]+\frac{1}{2\beta}+\frac{G(k)}{\mu\beta k}-(\gamma+X)\left[\frac{1}{2}+F(k)+\frac{G(k)}{k}\right]} \quad (14)$$

但し，$\sigma=\frac{\omega}{\omega_\alpha}$，$R=\frac{\omega_h}{\omega_\alpha}$，$\mu=\frac{m}{\pi\rho b^2}$，$\beta=\frac{r_a}{b}$，$\gamma=\frac{d}{r_a}$，$X=\frac{X_\alpha}{r_a}$．$k$の数値を与えて，それぞれの方程式の$\sigma$を求め，その交点より中立安定の解（フラッタ）を求める．

4. 数値例

数値例 1（第2図a，b）

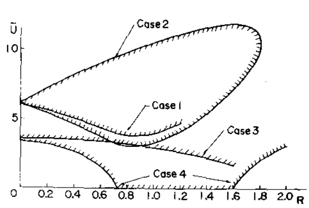
$\mu=90$，$R=0.2$，$\beta=0.56$，$\gamma=0.179$，$X=0.447$．



第2図 a，b

数値例 2（第3図）

数値例1においてRを変化させたもの．

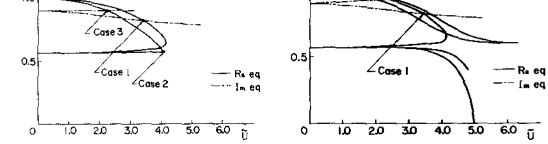


第 3 図

数値例 3（第4図a，b）

重心と弾性軸がともに翼弦中央にある場合．

$\mu=40$，$R=0.567$，$\beta=0.79$，$\gamma=\frac{1}{2\beta}=0.634$，$X=0$．



第4図 a，b

数値例に認められる一般的傾向．

1) 準定常空気力によるフラッタ解析は著しく低いフラッタ速度を与える．Case 4は最も劣る．

2) 定常空気力を用いたcase 2は最も近似がよい．

3) 一般に虚部方程式の振舞に相異がある．

4) 重心と弾性軸がともに翼弦中央にある場合，case 4では常にフラッタ速度は0．

5. 準定常空気力の問題点——近似理論としての欠陥

Case 1のフラッタ解析において重要な役割を占めるのは振動揚力の虚部である．

$$L=\pi\rho U^2b\left(\frac{b\dot\alpha}{U}\right)+2\pi\rho U^2b\left[F(k)+iG(k)\right]\left(\frac{\dot h}{U}+\alpha+\frac{b\dot\alpha}{U}\right)$$
$$=2\pi\rho U^2b\left\{kG(k)\left(\frac{h}{b}\right)+\left[F(k)+kG(k)\right]\alpha\right\}$$
$$+i2\pi\rho U^2b\left\{kF(k)\left(\frac{h}{b}\right)+k\left[\frac{1}{2}+F(k)+\frac{G(k)}{k}\right]\alpha\right\} \quad (15)$$

揚力の虚部の内，特に重要である$\left[\frac{1}{2}+F(k)+\frac{G(k)}{k}\right]$を考察する．

$\frac{1}{2}+F(k)$はdownwash $\left(\frac{b\dot\alpha}{U}\right)$によるもの，$\frac{G(k)}{k}$は渦流れの遅れによるものである．

ところで，準定常空気力では$G(k)=0$と置く．このことは，通常認められるlow-kフラッタにおいて，果して妥当であろうか？答はむしろ逆である．

$G(k)$の$k\cong0$における挙動を調べると，$G(k)\cong k(\ln\frac{k}{2}+\gamma_0)$．即ち，$G(k)$は$k=0$において対数的特異性をもつ．したがって$k\cong0$では，$\frac{1}{2}+F(k)+\frac{G(k)}{k}\cong\frac{G(k)}{k}\cong\ln\frac{k}{2}$となり，$G(k)=0$とする準定常空気力理論は$k\cong0$において，有効な近似空気力となり得ない．換言すれば，小さいdownwashの非定常性を保存し，大きい流れの遅れを無視することに矛盾がある．

一方，定常空気力は，振動空気力のkに関する展開の第0近似と見做すことができる．すなわち，特異性のある虚部を完全に無視し，もっとも重要な項$C_{L\alpha}$のみを保存するのではるかに合理的で，フラッタ解析の結果もいわば第0近似としての妥当性がある．