

早稲田大学 理工学部 正員 堀井 健一郎

全 大学院 学生員 川原 睦人

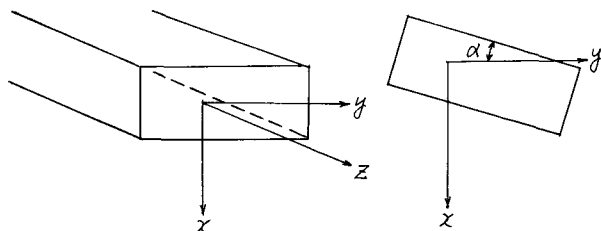
全 全 学生員 〇小杉 博孝

1. 緒 言

骨組構造の弾塑性解析では、従来、全断面降伏を前提とする極限解析が主として行われており、多くの有効な結論が得られている。近年、有限要素法による構造解析が急速に発達してきており、弾塑性解析の分野にも応用されるようになってきている。弾塑性解析に有限要素法を適用する際に問題となる点は、有限に分割した構造要素内で「かならずしも応力が一定でないために、剛性行列を計算する積分計算が複雑になることが挙げられる。上田¹⁾などは全断面降伏を前提とした骨組構造の弾塑性解析法を提案しており、有限変形を考えた場合への拡張も行っている。また、P. V. Marcal²⁾などは、断面方向により細かく分割して、その細分割された区間内に対して塑性流れ理論を適用することを行っている。著者らは中実断面の骨組構造の場合について断面方向および部材軸方向ともに要素内により細かく分割して計算する方法を示した。ここでは、薄肉断面をもつ直線部材の場合に同様の手法を拡張することについて述べる。

2. 変位 - 歪 関係

Fig. 1



座標系は右の図のように右寸系とする。

部材の各断面には、軸力 N 、曲げモーメント M_x, M_y 、バイモーメント M_{xy} による直応力 σ_z 、およびねじりモーメント T により生ずるせん断応力が存在するものとする。

なお曲げによるせん断応力は無視できるものとする。

中立軸における x, y, z 方向の変位を u_0, v_0, w_0 とすると xy 面内での任意点の変位 u, v, w は

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 + \phi(y - a_y) \\ v &= v_0 - \phi(x - a_x) \\ w &= w_0 - \frac{\partial v_0}{\partial z} y - \frac{\partial u_0}{\partial z} x - \omega \cdot xy \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

で示される。断面内の任意点 M における輪郭線の接線が Oy 軸となす角を α とすると、 v_0, u_0 をこの接線上に投影して接線方向変位 ξ 、法線方向変位 η を次のように示すことができる。

$$\xi = u_0 \sin \alpha + v_0 \cos \alpha + r_n \cdot \phi, \quad \eta = -v_0 \sin \alpha + u_0 \cos \alpha + r_n \cdot \phi \dots\dots\dots (2)$$

$$\left. \begin{aligned} r &= (x - a_x) \cdot \sin \alpha + (y - a_y) \cdot \cos \alpha \\ r_n &= -(x - a_x) \cdot \cos \alpha + (y - a_y) \cdot \sin \alpha \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

軸方向ひずみ ϵ およびせん断ひずみ γ は、(1), (2) 式を用いて次のように示される。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} - \left(\frac{\partial v_0}{\partial z} \right) \cdot y - \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} \right) \cdot x - \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right) \cdot xy \\ \gamma &= \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial s}(xyX - \omega) + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \cdot r_n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

ここで $\partial w_0 / \partial z = n$, $\partial v_0 / \partial z = \chi_x$, $\partial u_0 / \partial z = \chi_y$, $\partial w / \partial z = w$, $\partial \varphi / \partial z = \varphi$ とおくと (4) 式は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} dE \\ dI \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -y & -x & -xy \\ r_n - \frac{\partial}{\partial s}(xy) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dn, d\chi_x, d\chi_y, dw, d\varphi, d\omega \end{bmatrix}^T \quad \text{----- (5)}$$

3. 部材力と変形との関係

応力-歪関係は降伏条件として、Von Mises の降伏条件に従う Prandtl-Reuss の方程式によって与えられるものとする。すなわち応力増分 $d\sigma_z$, $d\tau$ と歪増分 $d\epsilon_z$, $d\gamma$ との間には次に示すような関係が成り立つものとする。

$$\begin{bmatrix} d\sigma_z \\ d\tau \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & -\frac{2}{3}E\sigma \\ G & -2G\tau \\ -\frac{2}{3}E\sigma - 2G\tau & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\epsilon_z \\ d\gamma \\ d\lambda \end{bmatrix} \quad \text{----- (6)}$$

$$\begin{aligned} \text{ここに } A &= \frac{4}{9}E\sigma^2 + 4G\tau^2 + \frac{4}{9}\bar{\sigma}^2 H' \\ \bar{\sigma}^2 &= \sigma_z^2 + 3\tau^2, \quad H' = d\bar{\sigma}/d\epsilon_p \end{aligned}$$

$\bar{\sigma}$ は相当応力を示し、この値が降伏応力 σ_y に等しくなった時に (6) 式が成り立つ。 H' は歪硬化係数であって実験によって定められる。

一方軸力の増分 dN 、曲げモーメントの増分 dM_x , dM_y 、バイモーメントの増分 dM_w 、ねじりモーメントの増分 dT は応力増分 $d\sigma_z$, $d\tau$ と次のような関係がある。

$$\begin{aligned} dN &= \int d\sigma_z dA, \quad dM_x = -\int d\sigma_z y dA, \quad dM_y = -\int d\sigma_z x dA, \quad dM_w = -\int d\sigma_z xy dA, \\ dT &= \int d\tau (r_n - \frac{\partial}{\partial s}(xy)) dA \end{aligned} \quad \text{----- (7)}$$

以上の (5), (6), (7) 式より

$$\begin{bmatrix} dN \\ dM_x \\ dM_y \\ dM_w \\ dT \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & & & & & & -EG\tau \\ & EI_x & & & & & EG\tau_y \\ & & EI_y & & & & EG\tau_x \\ & & & EI_w & & & EG\tau_w \\ -EG\tau & EG\tau_y & EG\tau_x & EG\tau_w & & & \\ & & & & GJ & -GJr & -2G\tau r_n \\ & & & & -GJr & GJw & 2G\tau \frac{\partial}{\partial s}(xy) \\ \frac{2}{3}E\sigma & \frac{2}{3}E\sigma y & \frac{2}{3}E\sigma x & \frac{2}{3}E\sigma xy & -2G\tau r_n & 2G\tau \frac{\partial}{\partial s}(xy) & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dn \\ d\chi_x \\ d\chi_y \\ d\omega \\ d\varphi \\ d\sigma \\ d\lambda \end{bmatrix} \quad \text{----- (8)}$$

(8) 式から $d\sigma$ を消去して簡単に次のように示しておく。

$$\begin{bmatrix} dN \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & R \\ R^T & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dn \\ d\lambda \end{bmatrix} \quad \text{----- (9)}$$

(8)(9) 式は弾性状態にある部材力増分と変形増分との間の関係を示している。

4. 剛性行列の誘導

(8) 式における変形増分 $dn, d\chi_x, d\chi_y, d\omega, d\varphi$ は次のように与えられるものと仮定する。

$$\begin{aligned} dn &= \frac{1}{l}(dw_a - dw_b) \\ d\chi_x &= \frac{1}{l^2}(6 - 12\frac{x}{l})(dv_a - dv_b) + \frac{1}{l}(4 - 6\frac{x}{l})d\theta_{xa} + \frac{1}{l}(2 - 6\frac{x}{l})d\theta_{xb} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dX_y &= \frac{1}{2}(6-12\frac{z}{l})(dU_a - dU_b) - \frac{1}{l}(4-6\frac{z}{l})d\theta_y a - \frac{1}{l}(2-6\frac{z}{l})d\theta_y b \\
d\varphi &= \frac{1}{D} \{ (e^{kx} - \bar{e}^{kx}) - (e^{k(x-l)} - \bar{e}^{k(x-l)}) + (e^{-kl} - \bar{e}^{kl}) \} k^2 (d\phi_a - d\phi_b) \\
&\quad + \{ (e^{kx} + \bar{e}^{kx}) - (e^{k(x-l)} + \bar{e}^{k(x-l)}) - kl(e^{kx} - \bar{e}^{kx}) + (2 - e^{kl} - \bar{e}^{kl}) \} k dW_a \\
&\quad + \{ kl(e^{kx} - \bar{e}^{kx}) + (e^{k(x-l)} + \bar{e}^{k(x-l)}) - (e^{kx} + \bar{e}^{kx}) + (2 - e^{kl} - \bar{e}^{kl}) \} k dW_b \\
dW &= \frac{1}{D} \{ k^3 \{ (e^{kx} + \bar{e}^{kx}) - (e^{k(x-l)} + \bar{e}^{k(x-l)}) \} (d\phi_a - d\phi_b) \\
&\quad + k^2 \{ (e^{kx} - \bar{e}^{kx}) - kl(e^{k(x-l)} + \bar{e}^{k(x-l)}) - (e^{k(x-l)} - \bar{e}^{k(x-l)}) \} dW_a \\
&\quad + k^2 \{ kl(e^{kx} + \bar{e}^{kx}) + (e^{k(x-l)} - \bar{e}^{k(x-l)}) - (e^{kx} - \bar{e}^{kx}) \} dW_b \}
\end{aligned}$$

$$\therefore \text{に } D = \{ 4 + kl(e^{kx} - \bar{e}^{kx}) - 2(e^{kx} + \bar{e}^{kx}) \} k, \quad k = \sqrt{GJ/ECw}$$

これを行列で表示すると次のようになる。

$$[dN] = [B_a \quad B_b] \cdot [dV_a \quad dV_b]^T \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\begin{aligned}
\therefore \text{に } [dN] &= [dN, dX_x, dX_y, dW, d\varphi]^T \\
[dV_a] &= [dW_a, dV_a, d\theta_a, dW_b, d\varphi_a, d\theta_b, dU_a]^T
\end{aligned}$$

dN は軸変増分、 dX_x, dX_y は各々 x 軸回り、 y 軸回りの曲率増分、 $d\varphi$ はねじり角増分、 dW はワーピング増分を示している。

(10)式および次に示す(11)式より変分定理を用いて材端部材力と材端変位との関係を導くことができる。

$$\begin{bmatrix} dF_a \\ dF_b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int [B_a^T] [R] [B_a \quad B_b] dz & \int [B_a^T] [R] dz \\ \int [B_b^T] [R] dz & \int [B_b^T] [R] dz \\ \int [R^T] [B_a \quad B_b] dz & \int [R^T] [B_b] dz \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dV_a \\ dV_b \\ d\lambda \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (11)$$

(11)式は簡単に次のように表わしておく。

$$\begin{bmatrix} dF \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K] & [Q] \\ [Q]^T & [A] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dV \\ d\lambda \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (12)$$

(12)式の K が弾性時の剛性行列である。

部材力増分と変位増分の間の関係は(11)式より $d\lambda$ を消去して次のように示される。

$$[dF] = ([K] - [Q][A][Q^T]) [dV] \quad \dots\dots\dots (13)$$

(12)式を用いて構造全体の解式を作成し、これに支点条件を導入して、各増分荷重ごとに変位の増分を求めて解を得る方法をとった。この時各荷重段階の剛性行列はその1回前の荷重段階における応力を用いて修正しながら計算を進めた。

5. 数値計算例

この解析法を用いれば、任意の立体骨組構造の弾塑性解を求めることができるが、ここでは解析解との比較を目的としているため、完全弾塑性体と仮定した材料からなる薄肉長方形断面の片持ばりを扱った。Fig. 2に示すように自由端に曲げモーメントおよびねじりモーメントが作用したときの荷重と変位との関係およびG. A. Morris等⁴⁾によって示された降伏面方程式の解との対比を行った。

ねじり変形については部材内の変位の境界条件にあわせて級数を用いて近似する方法がしばしば用いられているが、この場合には剛性を評価する上では不都合はないが、部材内の応力の変化と問題にする時には適しないことが判明した。

曲げモーメントのみの荷重の場合の断面の縁が降伏する時の値と全断面降伏時の値との比と他の解析解と比較した値は右表のようになる。

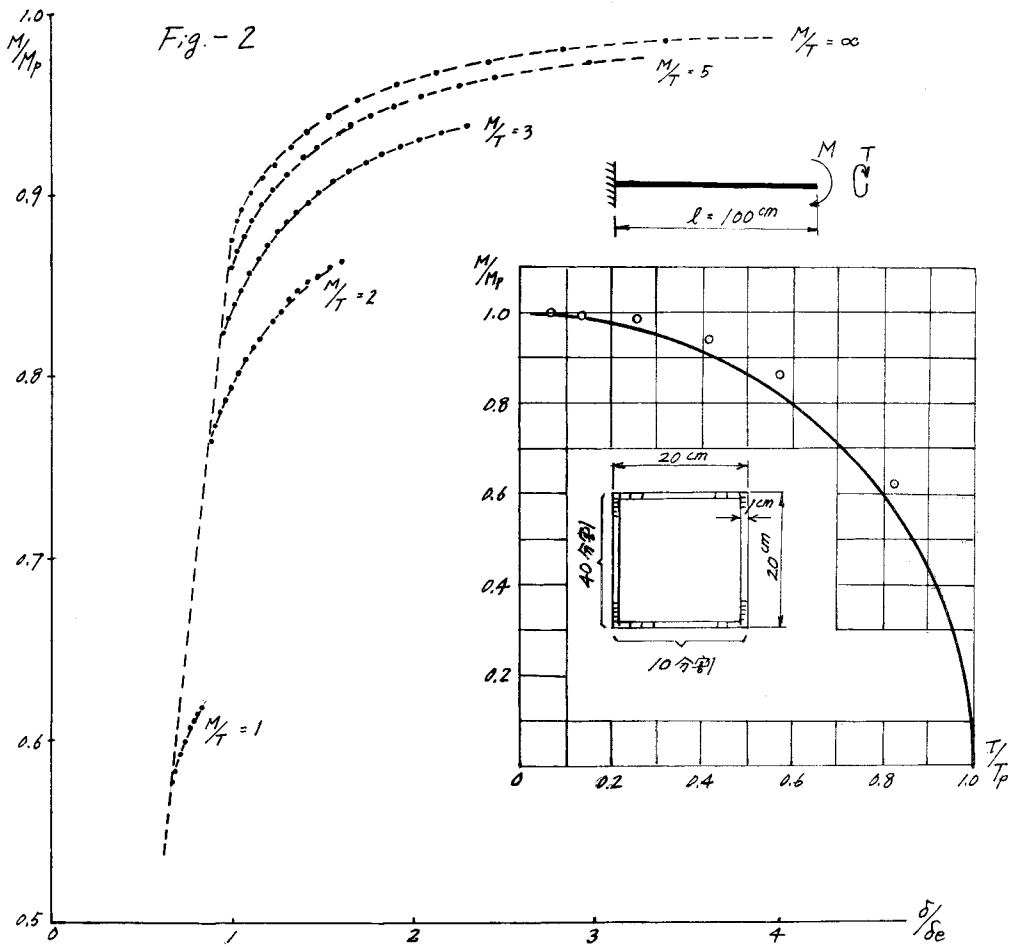
Table 1

	M_p/M_e
著者	1.143
山田嘉明	1.182
G. A. Morris	1.125

断面の分割はFig-2のように高さ方向に40分割、幅方向に10分割し、増分荷重は $dP/P_y = 0.005 \sim 0.0025$ とした。ただし、 P_y は断面の端部が降伏する時の曲げ又はねじりモーメントである。

なおここで用いた変位-ひずみ関係式はV/A50Vによって示された長方形薄肉閉断面の方程式である。この方程式によれば比較的簡単に塑性領域の発達を追跡でき、荷重変位曲線を忠実に追跡することが可能であるが、その反面、荷重の増分を相当細かくとる必要があり、また細分割された要素内の応力を記憶しなければならず比較的多くの記憶容量を必要とする。

数値計算にはBURROUGHS B-5500を用いた。



- 1) 上田幸雄他 マトリックス法による骨組構造の弾塑性解析. 日本鋼構造協会. マトリックス構造解析講演文集, 544. 5
- 2) P.V. Marcal Large deflection Analysis of elastic-plastic shells of revolution. AIAA/ASME, 10th Structures, structure Dynamics and materials. Conference (1969)
- 3) 堀井・川原 立体骨組構造の弾塑性解析. 第16回橋梁・構造工学研究発表会 (1969)
- 4) G. A. Morrisの Approximate Yield Surface Equation. Proc. ASCE, Vol. 95, No. FM4 1969