I-142　漸化変形法による骨組構造物の解析

信州大学工学部　○浜野浩幹
〃　谷本勉之助
〃　夏目正太郎

1. まえがき.

電子計算機の普及により，かなり大型の骨組構造物も楽に解析できるようになってきた。しかしこれとても，誤差の問題，電子計算機の容量などを考えると無制限に大きくすることはできない。

ここで述べる漸化変形法は，筆者の1人が先年ASCE誌上に発表した論文[1,2]の漸導子法に端を発しているものであり，以下に述べるように単位構の考えを導入することにより，漸化式の形を取ることができ，未知数を著しく減少することが可能になる。

2. 基本式.

漸化変形法に関する基本的な考え方および基本式の誘導は次のようである。

(1) 単位構.　一つの構造物は一本又は数本の部材によって成り立っている単位構の集合体と考えることができる。たとえば，連続ばりの場合は各径間を単位構と考え，ラーメンや格子は隣り合う節点の間の部材を単位構と考える。

したがって単位構の挙動は，それを支配する微分方程式の一般解から得られ次のように表わされる：

$$\mathbb{U}(\rho) = \mathbb{P}(\rho)(\mathbb{X}+\mathbb{K}), \qquad \mathbb{V}(\rho) = \mathbb{Q}(\rho)(\mathbb{X}+\mathbb{K}), \tag{1}$$

ここに $\mathbb{U}(\rho)$, $\mathbb{V}(\rho)$ はそれぞれ単位構の変位量と力量である。 $\mathbb{X}$ は微分方程式の積分定数群である未知数で，固有マトリクスと呼ばれる。 $\mathbb{K}$ は作用する荷重によって導びかれる荷重項である。

ここで $\mathbb{U}(\rho)$, $\mathbb{V}(\rho)$ の2，3の例をあげると

$$\begin{array}{lll} 1.\ \text{連続ばり}: & \mathbb{U}(\rho)=\{w,\ \theta\}, & \mathbb{V}(\rho)=\{M,\ S\}, \\ 2.\ \text{ラーメン}: & \mathbb{U}(\rho)=\{u,\ w,\ \theta\}, & \mathbb{V}(\rho)=\{F,\ S,\ M\}, \\ 3.\ \text{格子}: & \mathbb{U}(\rho)=\{\phi,\ w,\ \theta\}, & \mathbb{V}(\rho)=\{T,\ S,\ M\}, \\ 4.\ \text{トラス}: & \mathbb{U}(\rho)=\{u,\ v\}, & \mathbb{V}(\rho)=F. \end{array} \tag{2}$$

などである。

(2). 基本方程式.　式(1)により，その単位構の力量は変位量で表わすことができ

$$\begin{bmatrix} \mathbb{V}(0) \\ \mathbb{V}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{U}(0) \\ \mathbb{U}(1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma \\ \gamma' \end{bmatrix} \mathbb{K} \tag{3}$$

を得る。 これが基本方程式で $\alpha, \beta, \cdots$ などは式(1)の座標マトリクス $\mathbb{P}(\rho)$, $\mathbb{Q}(\rho)$ から得られる。

(3). 釣合い方程式.　(1)により隣り合う単位構の間の力釣合い条件

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}_i = 0 \tag{4}$$

を考えることによって，一方の単位構の間の未知量を他方の単位構へ移行することができ，漸化式が立てられることになる。

ここで平面2次元構造物を例にとれば，その (r, s) Node に関して次のような釣合式がかかれる：

$$a_{rs}\, v_{rs-1} + \lfloor b' \;\; b \;\; b'' \rfloor_{rs} \begin{bmatrix} v_{r-1} \\ v_r \\ v_{r+1} \end{bmatrix}_s + c_{rs}\, v_{r+1} + d_{rs}\, K_{rs} = 0. \tag{5}$$

(4). 最終方程式.　いま式(5)をr方向に集めると

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & a_m \end{bmatrix}_s \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_m \end{bmatrix}_{s-1} + \begin{bmatrix} b_1 & b_1'' & & \\ b_2' & b_2 & b_2'' & \\ & & \cdots & \\ & & b_m' & b_m \end{bmatrix}_s \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_m \end{bmatrix}_s + \begin{bmatrix} c_1 & & & \\ & c_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & c_m \end{bmatrix}_s \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_m \end{bmatrix}_{s+1} + \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & d_m \end{bmatrix}_s \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \cdots \\ K_m \end{bmatrix}_s = 0, \tag{6}$$

または

$$\lfloor \mathbb{A} \;\; \mathbb{B} \;\; \mathbb{C} \rfloor_s \{ v_{s-1} \;\; v_s \;\; v_{s+1} \} + \mathbb{D}_s \mathbb{K}_s = 0. \tag{7}$$

この形式は構造物の影響線を求めるのに大変便利である。　式(7)をsについて集めると

$$\begin{bmatrix} \mathbb{B}_1 & \mathbb{C}_1 & & \\ \mathbb{A}_2 & \mathbb{B}_2 & \mathbb{C}_2 & \\ & & \cdots & \\ & & \mathbb{A}_n & \mathbb{B}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{D}_1 & & & \\ & \mathbb{D}_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & \mathbb{D}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{K}_1 \\ \mathbb{K}_2 \\ \cdots \\ \mathbb{K}_n \end{bmatrix} = 0. \tag{8}$$

これが最終方程式である。　式(6), (8)は3軸マトリクスの形式になっている。

3. 論　括.

電子計算機で計算する場合，上の誘導から明らかなように，式(5), (6), (8)　のどの段階で解析を行なってもよい。　このとき次の事が考えられる。　再び例を平面2次元構造物にとる。

(1)　式(5)で解析していく場合，3元の連立方程式（たとえば格子の場合，1つの節点で未知数が3ケである）の漸化形式となり，計算機の容量上最も有効である。　例として FACOM 231 で（17×13＝）221節点のラーメンが解析できている（S.44年度 信大土木卒　遠藤君プロ完成）。

(2)　式(6)で解析していく場合，3×（r方向の節点数）の連立方程式の漸化形式となる。例として IBM System360 で（7×31＝）217節点の任意格子の影響線（450節点まで可能）が求められている。　(1), (2)とも漸化による計算の誤差は全々表われてこない。

(3)　式(8)の場合は，節点数の3倍の連立方程式となり，より大型の計算機が必要である。

---

1) B. Tanimoto : "Operational Method for Continuous Beams", Proceedings of the ASCE, Structural Division, Dec., 1964, pp. 213-242.

2) B. Tanimoto : "Operational Method for Pin-Jointed Trusses", Proceedings of the ASCE, Structural Division, June, 1966, pp. 179-198.