

1 変形法の解式の分解

変形法の解式は、一般に次のように書く事ができる。⁽¹⁾

$$(AC-BCL)K_{aa}(AC-BCL)^T X_p = P_p - (ACF_{fa} + BCF_{fb}) \quad \text{----- (1)}$$

これを次のように書き換え

$$(A-BCLC^T)CK_{aa}C(A-BCLC^T)X = P_p - (ACF_{fa} + BCF_{fb}) \quad \text{----- (2)}$$

さらに、2式に分解して

$$\begin{bmatrix} (CK_{aa}C^T)^{-1} & -(A-BCLC^T)^T \\ -(A-BCLC^T) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C(F-F_{fa}) \\ X_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ P_p' \end{bmatrix} \quad \text{----- (3)}$$

と書いてみる。式(3)より $C(F-F_{fa})$ を消却すれば、変形法の解式(1)にもどるが、ここでは X_p を消却する事を考えてみる。なお固定支束の処理は、左辺の係数行列に含まれる(2,1)小行列の行と(1,2)小行列の列で消えはよいし、ばね支束の場合は、(2,2)小行列の対角要素にばね定数を入れればよい。

2. 平面構造物の場合

式(3)の C, L, K_{aa} は次の小行列を対角線に並べたものである。

$$C = \begin{bmatrix} x/l - y/l & 0 \\ y/l & x/l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -l & 1 \end{bmatrix} \quad K_{aa} = \begin{bmatrix} EA/l & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/l^3 & 6EI/l^2 \\ 0 & 6EI/l^2 & 4EI/l \end{bmatrix}$$

したがって $CLC^T, CK_{aa}C^T$ は、次の小行列を対角線上に並べたものになる。

$$CLC^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ y & -x & 1 \end{bmatrix} \quad (CK_{aa}C^T)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{l}{EA} \left(\frac{x^2}{l^2} + \frac{l^3}{3EI} \frac{y^2}{l^2} \right) & \left(\frac{l}{EA} - \frac{l^3}{3EI} \right) \frac{xy}{l^2} & \frac{y}{l} \frac{l^2}{2EI} \\ \left(\frac{l}{EA} - \frac{l^3}{3EI} \right) \frac{xy}{l^2} & \frac{l}{EI} \left(\frac{y^2}{l^2} + \frac{l^3}{3EI} \frac{x^2}{l^2} \right) & \frac{-x}{l} \frac{l^2}{2EI} \\ \frac{l^2}{2EI} \frac{y}{l} & \frac{-l^2}{2EI} \frac{x}{l} & \frac{l}{EI} \end{bmatrix}$$

なお、 CLC^T には次の性質がある事に注意すべきである。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ y_1 & -x_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ y_2 & -x_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ y_1+y_2 & -(x_1+x_2) & 1 \end{bmatrix} \quad \text{----- (4)}$$

3 格子構造物の場合

平面構造物の場合と同じようにして次式が得られる。

$$CLC^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -Y \\ 0 & 1 & X \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C^T C L C^T = \begin{bmatrix} \frac{\ell(X)^2}{GJ(\ell)} - \frac{\ell(Y)^2}{EI(\ell)^2} & (\frac{\ell}{GJ} - \frac{\ell}{EI}) \frac{XY}{\ell^2} & -\frac{Y}{\ell} \frac{\ell^2}{2EI} \\ (\frac{\ell}{GJ} - \frac{\ell}{EI}) \frac{XY}{\ell^2} & \frac{\ell(Y)^2}{GJ(\ell)} + \frac{\ell(X)^2}{EI(\ell)^2} & \frac{X}{\ell} \frac{\ell^2}{2EI} \\ -\frac{\ell^2 Y}{2EI \ell} & \frac{\ell^2 X}{2EI \ell} & \frac{\ell^3}{3EI} \end{bmatrix}$$

CLC^T に次の関係がある事も平面構造物の場合と同じである。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -Y_1 \\ 0 & 1 & X_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -Y_2 \\ 0 & 1 & X_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -(Y_1+Y_2) \\ 0 & 1 & (X_1+X_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{----- (4)}$$

4 応力法の解式

式(3)に支束の処理をしたものを簡単に下の左のように書く事にする。これから、ばね定数 μ を含ませオ2式を用いて X_1 を消却すると、下の右のようになる。

$$\begin{bmatrix} H-D_1^T-D_2^T \\ -D_1 \mu & 0 \\ D_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} (H-D_1^T \mu D_1) & -D_2^T \\ -D_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -P_2 \end{bmatrix} \quad \text{----- (5)}$$

式(5)のオ2式から F が求まれば問題がない。しかし、一般に D_2 の行の数は列の数より少ない。そこでタミーの方程式 $\theta F = \theta F$ を追加して式(6)を作り、これを解いて式(7)とする。しかるに式(7)の並行列は、 D , θ に直交する行列 D_L , θ_L を用いて式(8)のように書けるから⁽²⁾

$$\begin{bmatrix} D_2 \\ \theta \end{bmatrix} F = \begin{bmatrix} P_2 \\ \theta F \end{bmatrix} \quad \text{--- (6)} \quad F = \begin{bmatrix} D_2 \\ \theta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_2 \\ \theta F \end{bmatrix} \quad \text{--- (7)} \quad \begin{bmatrix} D_2 \\ \theta \end{bmatrix}^T = [\theta_L (D_2 \theta_L)^T, D_{2L} (\theta D_{2L})^T] \quad \text{--- (8)}$$

式(5)のオ2式は、次のように変形できる。

$$F = \theta_L (D_2 \theta_L)^T P_2 + D_{2L} (\theta D_{2L})^T \theta F \quad \text{またわ} \quad F = D_{2L} F' + \theta_L (D_2 \theta_L)^T P_2 \quad \text{----- (9)}$$

これを式(5)のオ1式に代入して、左から $(D_{2L})^T$ を掛けると、次式が得られる。

$$[(D_{2L})^T (H-D_1^T \mu D_1) D_{2L}] F' = -[(D_{2L})^T (H-D_1^T \mu D_1) \theta_L (D_2 \theta_L)^T] P_2 \quad \text{----- (10)}$$

これが応力法の解式になる。式(10)を F' について解き式(9)に代入すると F すなわち式(3)の $C(F-F_{fa})$ を求める事ができる。直交する行列 D_{2L} , θ_L の作り方については、すでに報告済みであるが⁽²⁾ 構造物に含まれるループを対象にし、式(4)の性質を作うと更に簡単に求められる事が解つた。この点に関しては会場で説明する。

(1) 大地「変形法による構造解析」森北出版(数学ライブラリー-8), 77頁

(2) 大地「電子計算機による構造解析演習」橋梁 1969年4月