I-140　群遷移マトリクスによる骨組構造解析

熊本大学　工学部　正員　吉村虎蔵
同　上　正員　三池亮次
同　上　正員　宮村重範
同　上　学生員　○吉村　健

1. 要　旨　　記憶容量が十分に大きい高速電子計算機であれば，剛性マトリクス $\mathbf{K}$ が如何に大きくても，その逆マトリクスの演算は可能である。しかし，それが可能であるとしても，一般に骨組構造においては，$\mathbf{K}$ の非零要素が，その対角要素の付近に集中するのであるから，$\mathbf{K}$ マトリクスを分解して，零要素のみより成る剛性マトリクスを除き，非零要素を含む部分マトリクスのみによって計算する手法が，とくにそのバンド巾の小さい構造物の解析に有利と考える。

ここで言う群遷移マトリクスによる構造解析とは，一種の部分構造の手法の応用であり，言わば，群遷移マトリクスを誘導し，部分骨組構造に還元して行う解析である。

2. 理　論　　骨組構造を数個の部分構造に分割する（図-1,2参照）。以下部分構造Bについて考える。部分構造Bの切断面1において，部分構造Aより切断面を通して作用する断面力を $\mathbf{r}_1^B$，変位を $\mathbf{d}_1^B$ とするとき，$\mathbf{S}_1^B=\begin{Bmatrix}\mathbf{d}_1\\ \mathbf{r}_1\end{Bmatrix}^B$ で表わされるものを群状態ベクトルと定義する。同様に，部分構造Bの切断面2の群状態ベクトルを $\mathbf{S}_2^B=\begin{Bmatrix}\mathbf{d}_2\\ \mathbf{r}_2\end{Bmatrix}^B$ とする。$\mathbf{S}_1^B$ と $\mathbf{S}_2^B$ とを結びつける群遷移マトリックス $\mathbf{G}^B$ は次のようにして求めることができる。

切断面1に作用する外力を $\mathbf{p}_1^B$（切断面に作用する外力はすべて切断面の1側の節点に作用させるものとする。），切断面1,2の中間の構造節点に作用する外力を $\mathbf{p}_0^B$，変位を $\mathbf{d}_0^B$ とすれば，変位と力とは次の剛性マトリックスで結ばれる。

$$\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{10} & \mathbf{K}_{12}\\ \mathbf{K}_{01} & \mathbf{K}_{00} & \mathbf{K}_{02}\\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{20} & \mathbf{K}_{22}\end{bmatrix}^B \begin{bmatrix}\mathbf{d}_1\\ \mathbf{d}_0\\ \mathbf{d}_2\end{bmatrix}^B = \begin{bmatrix}\mathbf{r}_1+\mathbf{p}_1\\ \mathbf{p}_0\\ \mathbf{r}_2\end{bmatrix}^B \qquad (1)$$

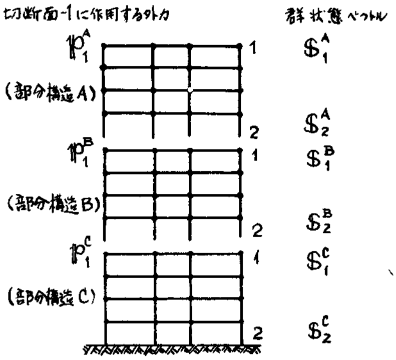

図-1　骨組構造の部分構造分割の例

(1)式において，剛性行列の分割行列要素に関しては図-2を参照されたい。(1)式から次の(2)式を得，それを(1)式に代入して(3)式を得る。以下の(2)～(5)式では添字Bは省略する。

$$\mathbf{d}_0=\mathbf{K}_{00}^{-1}\mathbf{p}_0-\mathbf{K}_{00}^{-1}\mathbf{K}_{01}\mathbf{d}_1-\mathbf{K}_{00}^{-1}\mathbf{K}_{02}\mathbf{d}_2 \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{r}_1&=(\mathbf{K}_{11}-\mathbf{K}_{10}\mathbf{K}_{00}^{-1}\mathbf{K}_{01})\mathbf{d}_1+(\mathbf{K}_{12}-\mathbf{K}_{10}\mathbf{K}_{00}^{-1}\mathbf{K}_{02})\mathbf{d}_2+(\mathbf{K}_{10}\mathbf{K}_{00}^{-1}\mathbf{p}_0-\mathbf{p}_1)\\ \mathbf{r}_2&=(\mathbf{K}_{21}-\mathbf{K}_{20}\mathbf{K}_{00}^{-1}\mathbf{K}_{01})\mathbf{d}_1+(\mathbf{K}_{22}-\mathbf{K}_{20}\mathbf{K}_{00}^{-1}\mathbf{K}_{02})\mathbf{d}_2+(\mathbf{K}_{20}\mathbf{K}_{00}^{-1}\mathbf{p}_0)\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

(3)式を状態ベクトルでまとめて(4)式を得，さらに(5)式のように変形する。

$$\begin{bmatrix} (\mathbb{K}_{12}-\mathbb{K}_{10}\mathbb{K}_{00}^{-1}\mathbb{K}_{02}) & \mathbb{O} \\ (\mathbb{K}_{22}-\mathbb{K}_{20}\mathbb{K}_{00}^{-1}\mathbb{K}_{02}) & -\mathbb{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{r}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\mathbb{K}_{11}-\mathbb{K}_{10}\mathbb{K}_{00}^{-1}\mathbb{K}_{01}) & \mathbb{I} \\ -(\mathbb{K}_{21}-\mathbb{K}_{20}\mathbb{K}_{00}^{-1}\mathbb{K}_{01}) & \mathbb{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{r}_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (\mathbb{K}_{10}\mathbb{K}_{00}^{-1}\mathbf{p}_0-\mathbf{p}_1) \\ \mathbb{K}_{20}\mathbb{K}_{00}^{-1}\mathbf{p}_0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{r}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbb{K}_{12}-\mathbb{K}_{10}\mathbb{K}_{00}^{-1}\mathbb{K}_{02}) & \mathbb{O} \\ (\mathbb{K}_{22}-\mathbb{K}_{20}\mathbb{K}_{00}^{-1}\mathbb{K}_{02}) & -\mathbb{I} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -(\mathbb{K}_{11}-\mathbb{K}_{10}\mathbb{K}_{00}^{-1}\mathbb{K}_{01}) & \mathbb{I} \\ -(\mathbb{K}_{21}-\mathbb{K}_{20}\mathbb{K}_{00}^{-1}\mathbb{K}_{01}) & \mathbb{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{r}_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (\mathbb{K}_{12}-\mathbb{K}_{10}\mathbb{K}_{00}^{-1}\mathbb{K}_{02}) & \mathbb{O} \\ (\mathbb{K}_{22}-\mathbb{K}_{20}\mathbb{K}_{00}^{-1}\mathbb{K}_{02}) & -\mathbb{I} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\mathbb{K}_{10}\mathbb{K}_{00}^{-1}\mathbf{p}_0-\mathbf{p}_1) \\ \mathbb{K}_{20}\mathbb{K}_{00}^{-1}\mathbf{p}_0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

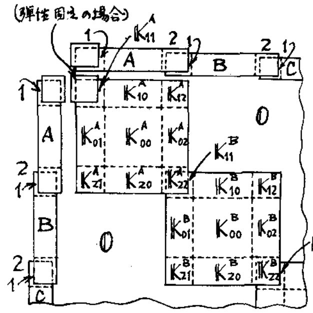

図-2 $\mathbb{K}$マトリックス

A, B, C ; 部分構造
1, 2 ; 切断面
0 ; ゼロ行列

(5)式の右辺第1項の，状態ベクトルにかゝる係数行列は群遷移マトリックス $\mathbb{G}$ であり，第2項は荷重項ともいうべきもので，これを $\mathbb{C}$ と書けば，(5)式は次式で示される。

$$\mathbb{S}_2^B = \mathbb{G}^B \mathbb{S}_1^B + \mathbb{C}^B \tag{6}$$

以上でB群の構造形態とその性状，および中間節点に作用する荷重状態が与えられたならば $\mathbb{G}^B$ と $\mathbb{C}^B$ が求まり，状態ベクトル $\mathbb{S}_1^B$ と $\mathbb{S}_2^B$ とは(6)式の群遷移マトリックスで結ばれることがわかった。

次に部分構造Bと部分構造Cとの切断面における状態ベクトル $\mathbb{S}_2^B$ から $\mathbb{S}_1^C$ への移行についての式が必要であるが，これは同断面における変形の適合条件式：$\mathbf{d}_2^B = \mathbf{d}_1^C$，および力のつり合い条件式：$\mathbf{r}_2^B + \mathbf{r}_1^C = 0$ を満足させる次式：

$$\mathbb{S}_1^C = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{r}_1 \end{bmatrix}^C = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -\mathbb{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{r}_2 \end{bmatrix}^B \equiv \mathbb{U}\,\mathbb{S}_2^B \tag{7}$$

で得られる。(6)，(7)両式から(8)式を得，同様の手法でA，B群について考えると，系全体では(9)式となる。

$$\mathbb{S}_1^C = (\mathbb{U}\,\mathbb{G}^B)\,\mathbb{S}_1^B + (\mathbb{U}\,\mathbb{C}^B) \tag{8}$$

$$\mathbb{S}_2^C = (\mathbb{G}^C\mathbb{U}\mathbb{G}^B\mathbb{U}\mathbb{G}^A)\,\mathbb{S}_1^A + (\mathbb{G}^C\mathbb{U}\mathbb{G}^B\mathbb{U}\mathbb{C}^A + \mathbb{G}^C\mathbb{U}\mathbb{C}^B + \mathbb{C}^C) \equiv \mathbb{G}\,\mathbb{S}_1^A + \mathbb{C} \tag{9}$$

(9)式に境界条件を入れることによって，部分構造に還元して構造解析を行うことができる。

3 結 語

すでに還元法を任意骨組構造に拡張した論文が発表されていることは周知の通りであるが，[4] ここに導かれた式の適用はより広義であると考える。上では2つの境界(自由端と固定端)を持つ直列部分骨組構造群についての式を誘導したが，境界として弾性固定(種々のバネ支承)の場合や，部分構造が種々の支承(中間支承)を持つ場合にも解析可能である。また，部分構造が分枝している場合や，振動(固有値問題)にも発展の余地があるものと思われる。

参考文献 1) R.K リブスレイ 山田他訳：“マトリクス構造解析入門”昭和43年 p.101， 2) R.ケルステン，伊藤訳：“構造力学における還元法 3)，中川健治，成岡昌夫：“変形法とReduction法との相互関係について”土木学会論文集141号 昭和42年5月 4) 遠田良喜：“遷移行列法による任意構造の解析”土木学会論文集 第160号 昭和43年12月