

I-137 立体骨組構造の安定解析

早稲田大学 理工学部 正員 堀井 健一郎
 全 大学院 学生員 川原 睦 人
 ハ戸工業高等専門学校 正員 ○ 斉藤 進
 早稲田大学 大学院 学生員 森 繁

I. まえがき

単一部材の座屈安定問題とはことなり、多数の部材を剛接して構成されている骨組構造の安定性は一部材が不安定状態に入って大きな変形を生ずるようになると、骨組を構成しているその他の部材にもこれにともなう変形が生じ、これらが相互に影響をおよぼし合うことになる。すなわち剛接骨組構造では各部材端は相互に弾性的に拘束されており、この拘束の度合は連続しているすべての部材の剛性とそれに作用する軸力の大きさによって影響されることになる。したがってこのような構造の安定問題は、前回報告¹⁾したような特別な場合すなわち構成部材がいずれも同一平面内にあり、かつそれらの面内外への変形がたがいに独立であるとみなしうるような場合を除いては、構造全体の安定問題として立体的に解析することが必要である。

骨組構造の安定を解析するためには、原理的には各部材ごとに変形条件式をつくり、つり合いおよび適合条件を用いて座屈条件式と導けばよい。いうまでもなく任意形状の骨組構造物の全体安定の解析では、一般に電子計算機の記憶容量の点から計算規模に制限をうけるのが現状である。ここではこれらの点も考慮して、実際に数値解を得るうえでの有用性も考慮した解析法について述べ、これと立体ポネートラス橋(格点は剛結とみなす)の安定解析に適用した例を示した。

II. 解 式

立体骨組を構成する各部材(部材座標 u, v, w 系、部材軸を u 座標にとる)に a 端および b 端の区別をつけ、部材力ベクトル $[U_a], [U_b]$ 、変形量ベクトル $[U_a], [U_b]$ を(1)式のようにあらわしておく。

$$[U_a] = \begin{bmatrix} Q_{ua} \\ Q_{va} \\ M_{wa} \\ M_{ua} \\ M_{va} \\ Q_{wa} \end{bmatrix}, \quad [U_b] = \begin{bmatrix} Q_{ub} \\ Q_{vb} \\ M_{wb} \\ M_{ub} \\ M_{vb} \\ Q_{wb} \end{bmatrix}, \quad [U_a] = \begin{bmatrix} q_{ua} \\ q_{va} \\ \theta_{wa} \\ \theta_{ua} \\ \theta_{va} \\ q_{wa} \end{bmatrix}, \quad [U_b] = \begin{bmatrix} q_{ub} \\ q_{vb} \\ \theta_{wb} \\ \theta_{ub} \\ \theta_{vb} \\ q_{wb} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(1)$$

次に部材の曲げによる変形、軸力による変形および単純ねじりによる変形を考慮して

$$\left. \begin{aligned} EI_w \frac{d^4 v}{du^4} + Q_{ua} \frac{d^2 v}{du^2} &= 0, & EI_v \frac{d^4 w}{du^4} + Q_{ua} \frac{d^2 w}{du^2} &= 0 \\ EA \frac{d^2 u}{d\xi^2} &= 0, & GJ \frac{d^2 \theta_u}{du^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

を(1)式の境界条件のもとに積分すれば、部材の剛性マトリックスが次のように得られる。

$$\begin{Bmatrix} U_a \\ U_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{aa} & k_{ab} \\ k_{ba} & k_{bb} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_a \\ U_b \end{Bmatrix} \quad \text{----- (3)}$$

こゝに

$$\begin{bmatrix} k_{aa} & k_{ab} \\ k_{ba} & k_{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a & k_b k_c & -k_a & -k_b k_c \\ k_c k_d & -k_c k_e & -k_f & -k_f k_h \\ k_f & k_i - k_h & -k_f & k_j k_h \\ -k_a & -k_b - k_e & k_a & -k_b - k_g \\ k_c k_e & -k_c k_d & -k_f & k_i k_h \\ -k_f & k_j - k_h & k_f & k_c k_h \\ k_h - k_g & k_h k_g & k_h k_g & k_h k_g \end{bmatrix}$$

たゞし 上式の各要素は

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \sqrt{Q_{ua}/EI_w}, \quad k_2 = \sqrt{Q_{ua}/EI_w}, \quad D_1 = EI_w/l^3, \quad D_2 = EI_w/l^3 \\ \varphi_1 &= \frac{(k_1 l)^2 (1 - \cos k_1 l)}{6(2 - 2\cos k_1 l - k_1 l \sin k_1 l)}, \quad \varphi_2 = \frac{k_1 l \sin k_1 l}{2(1 - \cos k_1 l)} \\ \varphi_3 &= \frac{(k_2 l)^2 (1 - \cos k_2 l)}{6(2 - 2\cos k_2 l - k_2 l \sin k_2 l)}, \quad \varphi_4 = \frac{k_2 l \sin k_2 l}{2(1 - \cos k_2 l)} \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (4)}$$

とおい

$$\left. \begin{aligned} k_a &= EA/l, \quad k_b = 12D_1\varphi_1 - D_1 k_1^2 l^2, \quad k_c = 6D_1 l \varphi_1, \quad k_d = D_1 l^2 (3\varphi_1 + \varphi_2) \\ k_e &= D_1 l^2 (3\varphi_1 - \varphi_2), \quad k_f = 4T/l, \quad k_g = 12D_2\varphi_3 - D_2 k_2^2 l^2, \quad k_h = 6D_2 l \varphi_3 \\ k_i &= D_2 l^2 (3\varphi_3 + \varphi_4), \quad k_j = D_2 l^2 (3\varphi_3 - \varphi_4) \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (5)}$$

とあらわすことができる。

上記の剛性マトリックスを全体座標系に変換し、さらに形状マトリックスを用いることによって、構造全体の剛性マトリックス $[K(Q_{ua})]$ が得られる。いま外力荷重と部材軸力とが比例して増大すると仮定すれば、 Q_{ua} を λQ_{ua} で置き換え $|K(\lambda)| = 0$ を満足するような λ を求めれば、これによりある荷重配置に対応する座屈荷重を知ることができる。しかし $|K(\lambda)|$ は λ の超越関数であるためこのまゝの形で λ を求めることは困難である。そこで軸力を含む (5) 式の各要素を級数展開し、高次項を省くことによって剛性におよぼす軸力の影響を線形化する。死荷重による軸力を Q_{ual} 、活荷重による軸力を Q_{ual} で表わせば、(5) 式の各要素は次のように書きあらわすことができる。

$$\left. \begin{aligned} k_b &= \frac{12EI_w}{l^3} - \frac{6Q_{ual}}{5l} - \frac{6Q_{ual}}{5l}, \quad k_c = \frac{6EI_w}{l^2} - \frac{1}{10}Q_{ual} - \frac{1}{10}Q_{ual} \\ k_d &= \frac{4EI_w}{l} - \frac{2}{15}Q_{ual}l - \frac{2}{15}Q_{ual}l, \quad k_e = \frac{2EI_w}{l} + \frac{1}{30}Q_{ual}l + \frac{1}{30}Q_{ual}l \\ k_g &= \frac{12EI_w}{l^3} - \frac{6Q_{ual}}{5l} - \frac{6Q_{ual}}{5l}, \quad k_h = \frac{6EI_w}{l^2} - \frac{1}{10}Q_{ual} - \frac{1}{10}Q_{ual} \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (6)}$$

$$k_i' = \frac{4EIv}{l} - \frac{2}{15} Q_{ua} l - \frac{2}{15} Q_{ua} l, \quad k_j' = \frac{2EIv}{l} + \frac{1}{30} Q_{ua} l + \frac{1}{30} Q_{ua} l \quad \}$$

ただし圧縮力で $Q_{ua} > 0$

すなわち上式の第2項までを用いて作った構造全体の剛性マトリックスを $[K_D]$ 、第3項までを用いて作った構造全体の剛性マトリックスを $[K_L]$ で示せば、座屈荷重を求める問題は一般型の固有値問題として

$$([K_D] - \lambda [K_L])\{X\} = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

を解く問題に帰着する。ここで λ はある活荷重配置に対応する座屈安全率を示すことになる。

III. 数値計算法

a) 固有値解法 (7) 式の固有値問題は計算機の容量を考慮して Rayleigh 商

$$R(\{X\}) = \frac{\{X\}^T [K_D] \{X\}}{\{X\}^T [K_L] \{X\}} \quad \dots\dots\dots (8)$$

を最小にする方法 (Minimization method) によって解いた。最小化のアルゴリズムは Fletcher と Reeves による共役勾配法を用い、 l 番目の中間固有値に対する共役性

$$\{X^{(i)}\} [K_L] \{X^{(i)}\} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, l-1 \quad \dots\dots\dots (9)$$

は Rosen の射影法によって保証されるようにプログラミングした。この方法によれば計算機の容量にくらべてかなり大きな自由度をもつ構造物を解析の対象とできるが、自由度が大きい場合には初期ベクトルのとり方によって、局所的な最小値とらる不安定さが経験された。

b) 荷重増分法 固有値解法によって得られた限界荷重の妥当性の検証と、限界荷重に近づいた場合の構造物の挙動を知るために、荷重増分法によって変位の計算を行い、得られた荷重-変位曲線から限界荷重を推定する方法を併用した。いま基準の荷重-変位方程式を

$$[K]\{X\} = \{P\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

とすれば増分荷重 $\{\Delta P\}$ によって上式を

$$[K + \Delta K]\{X + \Delta X\} = \{P + \Delta P\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

のようにかきなおすことができ、(10) 式の関係を用いさらに $[\Delta K]\{X\}$ の影響は小さいものとして無視すれば、増分荷重と増分変位の関係は

$$[K + \Delta K]\{\Delta X\} = \{\Delta P\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

となる。すなわち最初に $[K] = [K_D]$ をつくり、 $\{\Delta P\}$ 、 $[K]$ を用いて $\{\Delta X\}$ を計算し、 $\{\Delta X\}$ による軸力をもとめて $[\Delta K] = [K_L]$ を作成する。 $\{\Delta P\}$ と $[K + \Delta K]$ によってあらたな $\{\Delta X\}$ をもとめ、軸力に変化のないうことを確認し、次のステップでは $[K] = [K + \Delta K]$ とおく操作をくりかえした。

IV. 適用例

上述の解析法をポニートラスの全体座屈解析に適用した例を示す。ここで対象としている構造物は比較的大変形の単純支持された平行弦ワーレントラスと主橋にもつ、幅員の広いポニートラス道路橋を対象とした実験用模型である。図-1 にモデルの骨組図を示してある。このモデルはとくに主橋の面外変形が大きく出るように考えて諸元を定めたものであって、そのもの自身には現実性はない。

荷重は又点を除く下弦全格点に一様に載荷した。この荷重配置に対しての限界荷重は以下のように得られた。なお固有値解法の場合には1格点あたり $P=6\text{kg}$ を基準の荷重としている。

表-1

Case	解 法	λ	P_{cr} kg	備 考
1	固有値解法	$\lambda_1=0.986$	5.92	基本座標
2	固有値解法	$\lambda_1=0.987$	5.92	逆対称波形 最大1mmの初期変位
3	荷重増分法	—	推定 5.9	逆対称波形 最大1mmの初期変位

図-2 に荷重増分法による限界状態近くでの上弦材の面外変形を示した。この逆対称波形は固有値解法によって得られたものおよび実験から得られたものと一致する。図-3 には固有値解法による限界荷重および荷重増分法による計算結果とともに実験から得られた上弦格点の荷重-面外変位曲線を示した。初期変位の条件と計算と実験とで完全に一致させることが困難であるため、荷重-変位曲線の途中経路は一致していないが、

限界荷重はいずれの方法によってもほぼ同じ値が得られていることがわかる。

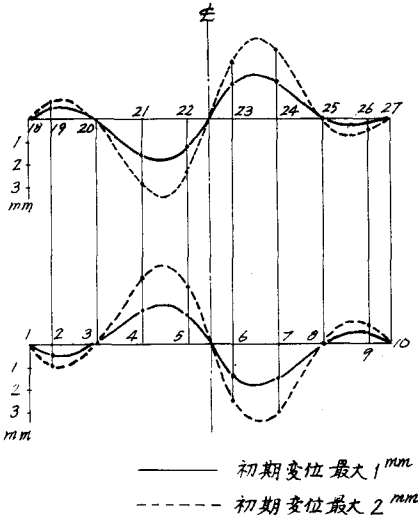


図-2 上弦材の横変位曲線(活荷重 $P=5\text{kg}$ のとき)

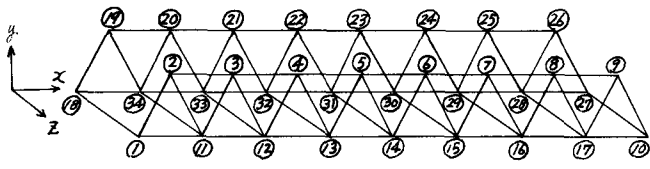


図-1. モデルの骨組図と格点番号

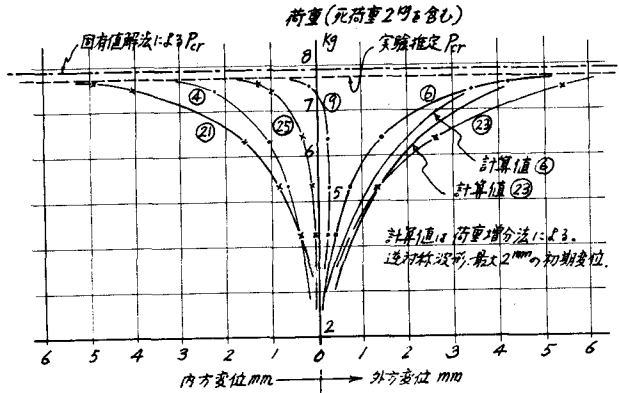


図-3 荷重-変位曲線 (初期変位最大2mm)

V. あとがき このに示した適用例では自由度が200をこえ、最小化法によって固有値を得るうえで初期ベクトルの選択、収束条件の決定等に関して多くの困難があった。また演算時間の関係から中間固有値を得ることはできなかった。なお構造物の状態によっては必ずしも立体解析を行う必要はなく、たとえばこの適用例のような構造で両主橋に荷重が対称に載荷されるような場合には、平面トラスの面外変位として処理しても結果に大差はないことが確認されている。計算に使用した計算機はBURROUGHS B-5500である。

り平面骨組構造の面外変位解析法, 堀井・川原, 土木学会 第24回 年次学術講演会講演集, 昭和44年9月。