I-136　立体剛接構造の解法　(第1報)

日本大学工学部　正員　安田禎輔

Kani氏の方法を拡張して立体剛接構造の試索計算法を試みた．まだ具体的な問題の計算段階には至ってないが，とりあえず一応の考察がまとまったので報告する次第であります．

§1. 座標変換

任意の二つのCartesian 座標系x^j, x^i の基本ベクトルを$\mathbb{e}_j$, $\mathbb{e}_i$とし，x^iのx^j座標系に関する方向余弦をa_j^iとすると，つぎの座標変換式が得られる．

$$\begin{cases}\mathbb{e}_i=\sum a_j^i\mathbb{e}_j\\ \mathbb{e}_j=\sum a_j^i\mathbb{e}_i\end{cases}\qquad\begin{cases}x^i=\sum a_j^i x^j\\ x^j=\sum a_j^i x^i\end{cases}$$

また，ベクトル$\mathbb{v}$のx^j, x^iの両座標系に関する成分をv^j, v^iとすれば同様な変換式が得られる．すなわち

$$v^i=\sum a_j^i v^j,\qquad v^j=\sum a_j^i v^i$$

§2. 部材端に任意方向の端モーメントが作用した場合

x^i座標系に関する方向余弦が$a_i^{(AB),1}$ なる部材ABの部材端Aに，モーメント$\mathbb{M}=\sum M^i\mathbb{e}_i$ が作用した場合について考察する．

今，材軸方向に$x^{(AB),1}$軸，水平直交方向に$x^{(AB),2}$軸，直交上方向に$x^{(AB),3}$ 軸なるCartesian座標軸を定め，これらの基本ベクトルを$\mathbb{e}_1^{(AB)}$, $\mathbb{e}_2^{(AB)}$, $\mathbb{e}_3^{(AB)}$とすれば

$$\mathbb{e}_i^{(AB)}=\sum a_j^{(AB),i}\mathbb{e}_j,\qquad \mathbb{e}_j=\sum a_j^{(AB),i}\mathbb{e}_i^{(AB)}$$

となり，$a_j^{(AB),i}$ は次式で表わされる．

$a_j^{(AB),1}$ ：AB部材のx^j座標系に関する方向余弦

$a_j^{(AB),2}$ ；$-a_2^{(AB),1}/\sqrt{1-(a_3^{(AB),1})^2}=-\sin\alpha$,　$a_1^{(AB),1}/\sqrt{\;}=\cos\alpha$,　0

$a_j^{(AB),3}$ ；$-a_1^{(AB),1}a_3^{(AB),1}/\sqrt{\;}=-\cos\alpha\cos\beta$,　$-a_2^{(AB),1}a_3^{(AB),1}/\sqrt{\;}=-\sin\alpha\cos\beta$,　$\sqrt{\;}=\sin\beta$

また，モーメント$\mathbb{M}$の$x^{(AB),i}$軸方向の成分をM_{AB}^i とすれば

$$M_{AB}^i=\mathbb{M}\cdot\mathbb{e}_i^{(AB)}=(\sum M^k\mathbb{e}_k)\cdot(\sum a_l^{(AB),i}\mathbb{e}_l)=\sum a_k^{(AB),i}M^k,\qquad M^k=\sum a_k^{(AB),i}M_{AB}^i$$

となり，これらの各成分は捩りモーメントおよび曲げモーメントを，もたらす端モーメントである．

$M_{AB}^1=\sum a_k^{(AB),1}M^k$；捩りモーメント

$M_{AB}^2=\sum a_k^{(AB),2}M^k$；鉛直たわみをもたらす端モーメント

$M_{AB}^3=\sum a_k^{(AB),3}M^k$；水平たわみをもたらす端モーメント

また，$\mathbb{M}=\sum M^i\mathbb{e}_i=\sum M_{AB}^k\mathbb{e}_k^{(AB)}=\sum_{i,k}a_i^{(AB),k}M_{AB}^k\mathbb{e}_i=\sum_{k,l}a_l^{(AB),k}M^l\mathbb{e}_k^{(AB)}$

§3. たわみ角法の基本式と捩りモーメント式の変形

ここで取り扱うものは等断面部材のものである．しかし変断面部材のものも後述の基本式に係数を乗ずることによって解くことができる．さて任意部材ABにおけるたわみ角法の基本式は$i\neq1$として

回転成分；$\acute{M}_{AB}^i=2EK_{AB}^i\theta_{AB}^i$,　$\acute{M}_{BA}^i=2EK_{AB}^i\theta_{BA}^i$　　固定端モーメント；$\overline{M}_{AB}^i=C_{AB}^i$, $\overline{M}_{BA}^i=C_{BA}^i$

変位成分；$\acute{\acute{M}}_{AB}^i=\acute{\acute{M}}_{BA}^i=-6EK_{AB}^iR_{AB}^i$

と置くことによって，次式で表わすことができる．

$$M^i_{AB}=\overline{M}^i_{AB}+2\acute{M}^i_{AB}+\acute{M}^i_{BA}+\acute{\acute{M}}^i_{AB}$$

$$M^i_{BA}=\overline{M}^i_{BA}+\acute{M}^i_{AB}+2\acute{M}^i_{BA}+\acute{\acute{M}}^i_{AB}\qquad \text{ただし,}\ i\neq 1$$

部材ABのA端およびB端における捩りモーメント M^1_{AB} および M^1_{BA} は一般に次式で示される．

$$M^1_{AB}=J(\theta^1_{AB}-\theta^1_{BA})/\ell=GJ'(\theta^1_{AB}-\theta^1_{BA})/\ell$$

$$M^1_{BA}=J(\theta^1_{BA}-\theta^1_{AB})/\ell=GJ'(\theta^1_{BA}-\theta^1_{AB})/\ell$$

ただし，J；捩り剛性，$J=GJ'$，G；横弾性係数

θ^1_{AB}, θ^1_{BA}；AおよびB端の捩り角

また，GとEの間には次の関係がある．ただし，νはポアソン比とする．

$$G=E/2(1-\nu)$$

上式を捩りモーメントの式に代入して次式を得る．

$$M^1_{AB}=2EK^1_{AB}(2\theta^1_{AB}-2\theta^1_{BA}),\qquad M^1_{BA}=2EK^1_{AB}(2\theta^1_{BA}-2\theta^1_{AB})$$

K^1_{AB}；等価剛度，$K^1_{AB}=J'/8(1-\nu)\ell$

ここで，捩り成分；$\acute{M}^1_{AB}=2EK^1_{AB}\theta^1_{AB}$, $\acute{M}^1_{BA}=2EK^1_{AB}\theta^1_{BA}$

とおけば，捩りモーメントの式は次式となる．

$$M^1_{AB}=2\acute{M}^1_{AB}-2\acute{M}^1_{BA},\ M^1_{BA}=2\acute{M}^1_{BA}-2\acute{M}^1_{AB},\quad M^1_{AB}=-M^1_{BA}$$

また，部材ABの中間に捩りモーメント荷重が作用すれば，両端に捩り端モーメント $\overline{M}^1_{AB}$, $\overline{M}^1_{BA}$ が生ずる．

したがって，$M^1_{AB}=\overline{M}^1_{AB}+2(\acute{M}^1_{AB}-\acute{M}^1_{BA})$

$$M^1_{BA}=\overline{M}^1_{BA}+2(\acute{M}^1_{BA}-\acute{M}^1_{AB})$$

ここで，δ_{ij}をクロネッカのデルタとすれば，基本式は，$M^i_{AB}=\overline{M}^i_{AB}+2\acute{M}^i_{AB}+\acute{M}^i_{BA}+\acute{\acute{M}}^i_{AB}-\delta_{1i}(3\acute{M}^i_{BA}+\acute{\acute{M}}^i_{AB})$

しだがって

$$M^j=\sum a^{(AB),i}_j M^i_{AB}$$

$$=\sum a^{(AB),i}_j\{\overline{M}^i_{AB}+2\acute{M}^i_{AB}+\acute{M}^i_{BA}+\acute{\acute{M}}^i_{AB}-\delta_{1i}(3\acute{M}^i_{BA}+\acute{\acute{M}}^i_{AB})\}$$

つぎに節点角 $\Theta=\sum\theta^i e_i$ と各部材に対する成分との関係について考察する．

$$\theta^i_{AB}=\Theta_A\cdot e^{(AB)}_i=\sum\theta^j_A e_j\cdot\sum a^{(AB),i}_k e_k=\sum_k\theta^k_A a^{(AB),i}_k$$

同様にして

$$\theta^k_A=\sum_i a^{(AB),i}_k\theta^i_{AB}$$

を得る．

§4. 回転係数と変位係数

(A) 回転係数　節点Aに於ける外力としてのモーメント荷動を$\mathfrak{M}_A$とすれば，節点方程式は$\sum M=\mathfrak{M}_A$とすれば，

$$2\sum_{B,i}a^{(AB),i}_k\acute{M}^i_{AB}=-\{\overline{M}^k_A+\sum_{B,i}a^{(AB),i}_k(\acute{M}^i_{BA}+\acute{\acute{M}}^i_{AB})-\sum_{B=1}^{n}a^{(AB),1}_k(3\acute{M}^1_{BA}+\acute{\acute{M}}^1_{AB})\}$$

ただし，$\overline{M}^k_A=\sum_{B,i}a^{(AB),i}_k\overline{M}^i_{AB}-\mathfrak{M}^k_A$；$x^k$方向の固定モーメント

回転係数μ^ℓ_{AC}を$\acute{M}^\ell_{AC}=-2\mu^\ell_{AC}\sum_{B,i}a^{(AB),i}_k\acute{M}^i_{AB}$と定義すれば

$$\mu^\ell_{AC}=-2EK^\ell_{AC}\theta^\ell_{AC}/2\sum_{B,i}a^{(AB),i}_k\cdot 2EK^i_{AB}\theta^i_{AB}$$

各部材の節点角θ^i_{AB}は節点角Θ_Aの成分である．したがって，$\Theta\neq 0$とすれば，θ^i_{AB}はΘ_Aの各成分によるものに分けて考察できる．成分θ^k_Aによる場合を考えれば

となる．この式のx^k成分について考える．

$$\sum M^k_A=\overline{\mathfrak{m}}^k_A$$

$$\mu^\ell_{AC,k}=-a^{(AC),\ell}_k K^\ell_{AC}/2\sum_{B,i}a^{(AB),i}_k a^{(AB),i}_k K^i_{AB}$$

$$\therefore\ \mu^\ell_{AC}=-\sum_k\left(\frac{a^{(AC),\ell}_k K^\ell_{AC}}{2\sum a^{(AB),i}_k a^{(AB),i}_k K^i_{AB}}\right)$$

したがって

$$\acute{M}^\ell_{AC}=\mu^\ell_{AC}\{\overline{M}^k_A+\sum_{B,i}a^{(AB),i}_k(\acute{M}^i_{BA}+\acute{\acute{M}}^i_{AB})-\sum_B a^{(AB),1}_k(3\acute{M}^1_{BA}+\acute{\acute{M}}^1_{AB})\}$$

この回転成分はx^k方向の釣合より求めたものであるから，各方向について計算し，これらの和としなければならない．

(B) 変位係数　剪力式は普通x^1，x^2方向の剪断力の釣合を考えれば充分であるが，特殊な形の構造物については，x^3方向の釣合も考えなければならない．ここではx^{i-1}方向の剪断力の釣合を考える．

A^i_n；In部材のn端に対する荷重のx^i方向のモーメント．

S^{i-1}_I；I-I層のx^{i-1}方向の荷重．ℓ_{In}；In部材の長さ．

$$\sum\left(\frac{M^{i+1}_I+M^{i+1}_n}{a^{(In),1}_i\ell_{In}}+\frac{M^i_I+M^i_n}{a^{(In),1}_{i+1}\ell_{In}}\right)=-S^{i-1}_I-\sum\left(\frac{A^i_n}{a^{(In),1}_{i+1}\ell_{In}}+\frac{A^{i+1}_n}{a^{(In),1}_i\ell_{In}}\right)$$

ここで，$k\neq\ell$, $k\sim\ell=1$, $i-1\neq(k\text{または}\ell)$

$$S_I=-S^{i-1}_I-\sum_{n,\ell,k}(A^\ell_n/a^{(In),1}_k\ell_{In})$$

とおけば $\displaystyle\sum_{n,\ell,k}\frac{M^\ell_I+M^\ell_n}{a^{(In),1}_k\ell_{In}}=-S_I$

さて $\acute{\acute{M}}^1_{AB}=0$ であるから，

$$\overline{S}_I=-S_I-\sum_{n,\ell,k}\left(\sum_i a^{(In),i}_\ell(\overline{M}^i_{In}+\overline{M}^i_{nI})/a^{(In),1}_k\ell_{In}\right)$$ とおけば

$$2\sum_{n,\ell}\frac{\sum_i a^{(In),i}_\ell\acute{\acute{M}}^i_{In}}{a^{(In),1}_k\ell_{In}}=\overline{S}_I+3\sum_{n,\ell,k}\frac{a^{(In),1}_\ell(\acute{M}^1_{In}+\acute{M}^1_{nI})-\sum_i a^{(In),i}_\ell(\acute{M}^i_{In}+\acute{M}^i_{nI})}{a^{(In),1}_k\ell_{In}}$$

ここで変位係数ν_{Im}を$\acute{\acute{M}}^\ell_{Im}=2\nu_{Im}\sum\dfrac{(\sum a^{(In),i}_\ell\acute{\acute{M}}^i_{In})}{a^{(In),1}_k\ell_{In}}$とおけば

$$\nu_{Im}=K^\ell_{Im}\gamma^\ell_{Im}\Big/2\sum\frac{\sum a^{(In),i}_\ell K^i_{In}\gamma^i_{In}}{a^{(In),1}_k\ell_{In}}$$

ここでγは変形条件により定まる定数である．