I-135　立体骨組構造物の力学的相似条件について

熊本大学　工学部　正員　福井武弘
同　上　正員　○三池亮次
大成建設　正員　右田泰弘

1．要　旨．　骨組構造解析のように数式による現象表示が比較的容易の場合には，弾性基礎式そのものの無次元化によって，より適正な無次元積を誘導することができる。ここでは，立体骨組構造の弾性基礎式をマトリクスで表示し，その力学的性状を支配する無次元積の誘導を試み，模型実験における相似則および骨組構造の比較設計上の諸問題について検討したものである。最適設計，構造物の標準化の問題にも，この相似解析は不可欠の手法と考える。

2．立体骨組構造解析の基礎式のマトリクス表示．　中間荷重が作用する場合の ij 部材の i 点における断面力は，$\overline{u}_{iji}$，$\overline{u}_{ijj}$ を ij 部材の i または j 点における変位とするとき　次式

$$\overline{X}_{iji}=\overline{K}_{iji}\cdot\overline{u}_{iji}+\overline{K}_{ijj}\cdot\overline{u}_{ijj}+\overline{C}_{iji} \tag{1}$$

で与えられる。ここに $\overline{C}_{iji}$ は $\overline{u}_{iji}=\overline{u}_{ijj}=0$，すなわち ij 部材の部材端を固定したときの中間荷重に基づく i 点における断面力．$\overline{K}_{iji}$，$\overline{K}_{ijj}$ は剛性マトリクスである。バーは部材座標軸を意味する。

変位，断面力の正の方向を次のように定める。

① 基準座標軸は右手系 (x, y, z) 軸で表わす。

② ij 部材 $(j>i)$ の $\overrightarrow{ij}$ 方向を ξ 軸の正方向とする右手座標系で，ij 部材座標軸を表わす。

ji 部材については，ij 部材軸と逆方向の座標軸，したがって左手系で，部材座標軸を表わす。

③ 正の断面において正の方向，または負の断面において負の方向の部材断面力を正の断面力とする。曲げモーメントの正の方向は，右まわりねじの進む方向とする。

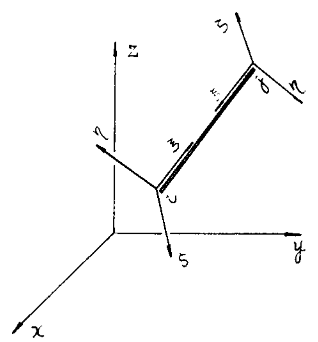

図-1　立体骨組構造の基準および部材座標軸．

立体骨組構造において，部材座標軸に対する変位および断面力のベクトルの成分は，添字 (t) で転置を意味するものとして，

$$\overline{u}_{iji}^{(t)}=[\overline{u},\overline{v},\overline{w},\overline{\Phi}_\xi,\overline{\Phi}_\eta,\overline{\Phi}_\zeta]_{iji},\qquad \overline{X}_{iji}^{(t)}=[\overline{X},\overline{Y},\overline{Z},\overline{M}_\xi,\overline{M}_\eta,\overline{M}_\zeta]_{iji}$$

である。ここに，$\overline{u}$，$\overline{v}$，$\overline{w}$，$\overline{X}$，$\overline{Y}$，$\overline{Z}$ は，各軸方向の変位および断面力，$\overline{\Phi}_\xi$，$\overline{\Phi}_\eta$，$\overline{\Phi}_\zeta$，$\overline{M}_\xi$，$\overline{M}_\eta$，$\overline{M}_\zeta$ は各軸のまわりの廻転変位およびモーメント，添字 iji は，ij 部材の i 点における値を意味する。また，剛性マトリクスを

$$\overline{K}_{iji}=\begin{bmatrix}-K_{11}&&&0&&\\&-K_{22}&&&&K_{26}\\&&-K_{33}&&K_{35}&\\0&&&-K_{44}&&0\\&&-K_{53}&&-K_{55}^{i}&\\&-K_{62}&&0&&-K_{66}^{i}\end{bmatrix}_{ij},\qquad \overline{K}_{ijj}=\begin{bmatrix}K_{11}&&&0&&\\&K_{22}&&&&K_{26}\\&&K_{33}&&K_{35}&\\0&&&K_{44}&&0\\&&K_{53}&&-K_{55}^{j}&\\&K_{62}&&0&&-K_{66}^{j}\end{bmatrix}_{ij}$$

とすれば、せん断力による部材の変形を考慮するとき、剛性マトリクスの要素Kは、添字 ij を省略して、

$$K_{11}=\frac{EA}{\ell}\qquad K_{55}^{i}=\frac{4EI_\eta(1+3\varepsilon_\eta)}{(1+12\varepsilon_\eta)\ell}$$

$$K_{22}=\frac{12EI_\xi}{(1+12\varepsilon_\xi)\ell^3}\qquad K_{26}=-\frac{1}{2}K_{22}\ell=-K_{62}\qquad K_{66}^{i}=\frac{4EI_\xi(1+3\varepsilon_\xi)}{(1+12\varepsilon_\xi)\ell}$$

$$K_{33}=\frac{12EI_\eta}{(1+12\varepsilon_\eta)\ell^3}\qquad K_{35}=\frac{1}{2}K_{33}\ell=-K_{53}\qquad K_{55}^{j}=\frac{2EI_\eta(1-6\varepsilon_\eta)}{(1+12\varepsilon_\eta)\ell}$$

$$K_{44}=\frac{kGI_\xi}{\ell}\qquad K_{66}^{j}=\frac{2EI_\xi(1-6\varepsilon_\xi)}{(1+12\varepsilon_\xi)\ell}$$

ここに

$$\varepsilon_\eta=2(1+\nu)\frac{1}{r_\eta^2}\qquad \varepsilon_\xi=2(1+\nu)\frac{1}{r_\xi^2}$$

である。ℓ, A, E, G, I, νは部材の長さ、断面積、弾性係数、せん断弾性係数、断面２次モーメント，ポアソン比であり、rは部材の細長比である。その添字 η, ξ でη軸あるいはξ軸のまわりの値を意味する。なお、中間荷重による固定端断面力の成分を次のようにする。

$$\overline{\mathbb{C}}_{iji}^{(t)}=[\,\overline{C}_X,\overline{C}_Y,\overline{C}_Z,\overline{C}_{M\xi},\overline{C}_{M\eta},\overline{C}_{M\xi}\,]_{iji}$$

３．無次元積の誘導　　(1)式の第１行より第３行に $\frac{1}{E_oA_o}$ を、第４行より第６行に $\frac{1}{E_oA_o\ell_o}$ を乗じ無次元化する。ここに、E_o, A_o, ℓ_oの添字 o は、基準部材における値を意味するものとする。また

$$k_{Eij}=\frac{E_{ij}}{E_o}\ ,\quad k_{Aij}=\frac{A_{ij}}{A_o}\ ,\quad k_{Lij}=\frac{\ell_{ij}}{\ell_o}\ ,\quad r_{\xi ij}^2=\frac{A_{ij}\ell_{ij}^2}{I_{\xi ij}}=\frac{1}{\frac{1}{r_{\eta ij}^2}+\frac{1}{r_{\xi ij}^2}}$$

とすれば、剛性マトリクスの要素は、次のとおりとなる。

$$\frac{K_{11}}{E_oA_o}=k_E\cdot k_A\frac{1}{k_L}\frac{1}{\ell_o}\qquad \frac{K_{55}^{i}}{E_oA_o\ell_o}=k_E\cdot k_A\cdot k_L\cdot K_{55}^{io}\ ,\quad K_{55}^{io}=\frac{4(1+3\varepsilon_\eta)}{(1+12\varepsilon_\eta)r_\eta^2}$$

$$\frac{K_{22}}{E_oA_o}=k_E k_A\cdot\frac{1}{k_L}\cdot K_{22}^{o}\frac{1}{\ell_o}\ ,\quad K_{22}^{o}=\frac{12}{(1+12\varepsilon_\xi)r_\xi^2}\ ,\quad \frac{K_{66}^{i}}{E_oA_o\ell_o}=k_E\cdot k_A\cdot k_L\cdot K_{66}^{io}\ ,\quad K_{66}^{io}=\frac{4(1+3\varepsilon_\xi)}{(1+12\varepsilon_\xi)r_\xi^2}$$

$$\frac{K_{33}}{E_oA_o}=k_E\cdot k_A\cdot\frac{1}{k_L}\cdot K_{33}^{o}\frac{1}{\ell_o}\ ,\quad K_{33}^{o}=\frac{12}{(1+12\varepsilon_\eta)r_\eta^2}\ ,\quad \frac{K_{55}^{j}}{E_oA_o\ell_o}=k_E\cdot k_A\cdot k_L\cdot K_{55}^{jo}\ ,\quad K_{55}^{jo}=\frac{2(1-6\varepsilon_\eta)}{(1+12\varepsilon_\eta)r_\eta^2}$$

$$\frac{K_{44}}{E_oA_o\ell_o}=k_E\cdot k_A\cdot k_L\cdot K_{44}^{o}\ ,\quad K_{44}^{o}=\frac{k_{ij}}{2(1+\nu)r_\xi^2}\ ,\quad \frac{K_{66}^{j}}{E_oA_o\ell_o}=k_E\cdot k_A\cdot k_L K_{66}^{jo}\ ,\quad K_{66}^{jo}=\frac{2(1-6\varepsilon_\xi)}{(1+12\varepsilon_\xi)r_\xi^2}$$

$$\frac{K_{26}}{E_oA_o}=-\frac{1}{2}k_E\cdot k_A\cdot K_{22}^{o}\ ,\quad \frac{K_{62}}{E_oA_o\ell_o}=\frac{1}{2}k_E\cdot k_A\cdot K_{22}^{o}\frac{1}{\ell_o}\ ,\quad \frac{K_{35}}{E_oA_o}=\frac{1}{2}k_E\cdot k_A\cdot K_{33}^{o}\ ,\quad \frac{K_{53}}{E_oA_o\ell_o}=-\frac{1}{2}k_E\cdot k_A\cdot K_{33}^{o}\frac{1}{\ell_o}$$

また、P_oを外力の基準値とすれば、次の無次元断面力を得る。

$$\frac{\overline{X}}{E_oA_o}=\frac{P_o}{E_oA_o}\cdot\frac{\overline{X}}{P_o}\ ,\quad \overline{X}^{o}=\frac{\overline{X}}{P_o}\ ,\ \cdots\cdots\quad \frac{\overline{M}_\xi}{E_oA_o\ell_o}=\frac{P_o}{E_oA_o}\frac{\overline{M}_\xi}{P_o\ell_o}\ ,\quad \overline{M}_\xi^{o}=\frac{\overline{M}_\xi}{P_o\ell_o}\ ,\cdots\cdots$$

同様に、固定端断面力の無次元積として、

$$\frac{\overline{C}_X}{E_oA_o}=\frac{P_o}{E_oA_o}\frac{\overline{C}_X}{P_o}\ ,\quad \overline{C}_X^{o}=\frac{\overline{C}_X}{P_o}\ ,\cdots\cdots\quad \frac{\overline{C}_{M\xi}}{E_oA_o\ell_o}=\frac{P_o}{E_oA_o}\frac{\overline{C}_{M\xi}}{P_o\ell_o}\ ,\quad \overline{C}_{M\xi}^{o}=\frac{\overline{C}_{M\xi}}{P_o\ell_o}\ ,\cdots\cdots$$

上記の無次元断面力を要素とする、無次元ベクトルを

$$\overline{X}_{iji}^{o(t)}=[\,\overline{X}^{o},\overline{Y}^{o},\overline{Z}^{o},\overline{M}_\xi^{o},\overline{M}_\eta^{o}\ \overline{M}_\xi^{o}\,]_{iji}\ ,\qquad \overline{\mathbb{C}}_{iji}^{o(t)}=[\,\overline{C}_X^{o},\overline{C}_Y^{o},\overline{C}_Z^{o},\overline{C}_{M\xi}^{o},\overline{C}_{M\eta}^{o},\overline{C}_{M\xi}^{o}\,]_{iji}$$

とし、変位の無次元量を

$$\overline{\mathrm{u}}_{iji}^{\circ(t)}=\left[\frac{\bar{u}}{l_\circ},\frac{\bar{v}}{l_\circ},\frac{\bar{w}}{l_\circ},\bar{\phi}_\xi,\bar{\phi}_\eta,\bar{\phi}_\zeta\right]_{iji}$$

とすれば、剛性マトリクスの無次元量

$$\overline{\mathrm{K}}_{iji}^{\circ}=k_{Eij}\cdot k_{Aij}\begin{bmatrix}-\frac{1}{k_L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{k_L}K_{22}^{\circ} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}K_{22}^{\circ}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{k_L}K_{33}^{\circ} & 0 & \frac{1}{2}K_{33}^{\circ} & 0\\ 0 & 0 & 0 & -k_LK_{44}^{\circ} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}K_{33}^{\circ} & 0 & -k_LK_{55}^{i\circ} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}K_{22}^{\circ} & 0 & 0 & 0 & -k_LK_{66}^{i\circ}\end{bmatrix}_{ij},\quad \overline{\mathrm{K}}_{ijj}^{\circ}=k_{Eij}\cdot k_{Aij}\begin{bmatrix}\frac{1}{k_L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{k_L}K_{22}^{\circ} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}K_{22}^{\circ}\\ 0 & 0 & \frac{1}{k_L}K_{33}^{\circ} & 0 & \frac{1}{2}K_{33}^{\circ} & 0\\ 0 & 0 & 0 & k_LK_{44}^{\circ} & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}K_{33}^{\circ} & 0 & -k_LK_{55}^{j\circ} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}K_{22}^{\circ} & 0 & 0 & 0 & -k_LK_{66}^{j\circ}\end{bmatrix}_{ij}$$

に対して、次式が成立するであろう。

$$\left(\frac{P_\circ}{E_\circ A_\circ}\right)\overline{\mathrm{X}}_{iji}^{\circ}=\overline{\mathrm{K}}_{iji}^{\circ}\,\overline{\mathrm{u}}_{iji}^{\circ}+\overline{\mathrm{K}}_{ijj}^{\circ}\,\overline{\mathrm{u}}_{ijj}^{\circ}+\left(\frac{P_\circ}{E_\circ A_\circ}\right)\overline{\mathbb{C}}_{iji}^{\circ} \tag{2}$$

また、i 節点における外力および変位の無次元ベクトルを

$$\mathbb{X}_i^{\circ(t)}=\left[\frac{X}{P_\circ},\frac{Y}{P_\circ},\frac{Z}{P_\circ},\frac{M_x}{P_\circ l_\circ},\frac{M_y}{P_\circ l_\circ},\frac{M_z}{P_\circ l_\circ}\right]_i,\quad \mathbb{u}_i^{\circ(t)}=\left[\frac{u}{l_\circ},\frac{v}{l_\circ},\frac{w}{l_\circ},\phi_x,\phi_y,\phi_z\right]_i$$

部材軸の基準部材に対する方向余弦マトリクスを $\mathbb{T}_{iji}$ とすれば、i 節点における平衡方程式は、

$$\sum_j \mathbb{T}_{iji}^{(t)}\overline{\mathrm{X}}_{iji}+\mathbb{X}_i=0 \qquad \text{あるいは、}\quad \sum_j \mathbb{T}_{iji}^{(t)}\left(\frac{P_\circ}{E_\circ A_\circ}\right)\overline{\mathrm{X}}_{iji}^{\circ}+\left(\frac{P_\circ}{E_\circ A_\circ}\right)\mathbb{X}_i^{\circ}=0 \tag{3}$$

であり、

$$\overline{\mathrm{u}}_{iji}^{\circ}=\mathbb{T}_{iji}\cdot\mathbb{u}_i^{\circ}\quad,\quad \overline{\mathrm{u}}_{ijj}^{\circ}=\mathbb{T}_{ijj}\,\mathbb{u}_j^{\circ} \tag{4}$$

であるから、(2), (4) 式を (3) 式に代入すれば、

$$\left(\sum_j \mathbb{T}_{iji}^{(t)}\overline{\mathrm{K}}_{iji}^{\circ}\mathbb{T}_{iji}\right)\mathbb{u}_i^{\circ}+\sum_j\left[\left(\mathbb{T}_{iji}^{(t)}\overline{\mathrm{K}}_{ijj}^{\circ}\mathbb{T}_{iji}\right)\mathbb{u}_j^{\circ}\right]=-\frac{P_\circ}{E_\circ A_\circ}\left(\mathbb{C}_i^{\circ}+\mathbb{X}_i^{\circ}\right)=\frac{P_\circ}{E_\circ A_\circ}\mathbb{P}_i^{\circ} \tag{5}$$

を得る。ここに

$$\mathbb{C}_i^{\circ}=\sum_j \mathbb{T}_{iji}^{(t)}\overline{\mathbb{C}}_{iji}^{\circ}\,,\quad \mathbb{P}^{\circ(t)}=\left[\mathbb{P}_1^{\circ(t)},\mathbb{P}_2^{\circ(t)},\cdots\cdots,\mathbb{P}_N^{\circ(t)}\right]\;,\quad \mathbb{u}^{\circ(t)}=\left[\mathbb{u}_1^{\circ(t)},\mathbb{u}_2^{\circ(t)},\cdots\cdots,\mathbb{u}_N^{\circ(t)}\right]$$

とすれば、基準座標軸に対する剛性マトリクスの無次元積を $\mathbb{K}^{\circ}$ とするとき、

$$\mathbb{K}^{\circ}\mathbb{u}^{\circ}=\frac{P_\circ}{E_\circ A_\circ}\mathbb{P}^{\circ}\qquad \text{あるいは、}\quad \frac{E_\circ A_\circ}{P_\circ}\mathbb{u}^{\circ}=\mathbb{K}^{\circ-1}\mathbb{P}^{\circ} \tag{6}$$

(6)式は、無次元積、$\overline{\mathrm{K}}_{iji}^{\circ}$, $\overline{\mathrm{K}}_{ijj}^{\circ}$ によって構成される無次元積 $\mathbb{K}^{\circ-1}$ と荷重の無次元積 $\mathbb{P}^{\circ}$ の積により、

変位の無次元積、$\dfrac{E_\circ A_\circ}{P_\circ}\dfrac{u}{l_\circ}$ 　　, 廻転変位の無次元積 $\dfrac{E_\circ A_\circ}{P_\circ}\phi_x$, ------

の誘導されることを示す。(6)式より得る $\mathbb{u}_i^{\circ}$, $\mathbb{u}_j^{\circ}$ を(4)式に、(4)式をさらに(2)式に代入すれば、

$$\overline{\mathrm{X}}_{iji}^{\circ}=\left\{\overline{\mathrm{K}}_{iji}^{\circ}\mathbb{T}_{iji}\left(\mathbb{K}^{\circ-1}\right)_i+\overline{\mathrm{K}}_{ijj}^{\circ}\mathbb{T}_{iji}\left(\mathbb{K}^{\circ-1}\right)_j\right\}\mathbb{P}^{\circ}+\overline{\mathbb{C}}_{iji}^{\circ} \tag{7}$$

であるから、断面力の無次元積は、既述の無次元積で十分である。

軸力 $\bar{X}$ と曲げモーメント $\bar{M}_\eta$ を受ける部材断面の縁応力 $\sigma_{XM\eta}$ は η 軸よりの縁距離を z_η とするとき

$$\sigma_{XM\eta}=\frac{\bar{X}}{A}\pm\frac{\bar{M}_\eta}{I_\eta}z_\eta$$

であるから，両辺に A_0/P_0 を乗じて，応力の無次元積を誘導すれば，

$$\sigma^{\circ}_{xM\eta}=\frac{\sigma_{xM\eta}A_0}{P_0}=\frac{A_0}{A}\frac{\overline{X}}{P_0}\pm\frac{A_0}{A}\frac{\ell_0}{\ell}\frac{A\ell^2}{I_\eta}\frac{\overline{M}_\eta}{P_0\ell_0}\frac{z_\eta}{\ell}$$
$$=\frac{1}{k_A}\overline{X}_0\pm\frac{1}{k_A}\cdot\frac{1}{k_L}\cdot r_\eta^2\cdot z^{\circ}_\eta\cdot\overline{M}^{\circ}_\eta \qquad (8)$$

4．相似解析．　立体骨組構造の力学的性状に関与する各種の無次元積を次のようにとりまとめる。

(a) 形状に関するもの ── $k_A, k_L, k_{ij}, T_{ij}, z^{\circ}_\eta, z^{\circ}_\xi, r_{0\eta}\ r_{0\xi}, k_I$ ──

なお 細長比．

$$r^2=\frac{A\ell^2}{I}=\frac{A}{A_0}\frac{\ell^2}{\ell_0^2}\frac{I_0}{I}\cdot\frac{A_0\ell_0^2}{I_0}=\left(k_A\cdot k_L/k_I\right)r_0^2 \qquad (9)$$

であるから，r^2 の代わりに，r_0^2，k_I が，形状を表わす無次元積として追加されることになる。

(b) 材料に関するもの ── ν, k_E ──

(c) 荷重に関するもの ── P°，M°，$\overline{C}^{\circ}_X$，$\overline{C}^{\circ}_{M\xi}$，…… ── $\overline{C}^{\circ}$ は，前記の無次元積で表わされる。

二つのシステム p, m の形状，材料，荷重に関する上記の無次元積が等しいとき，両者の形状，材料，載荷形式は相似であり，次の変形の相似則が成立するであろう。

(a)　変位の相似則

$$\left(\frac{E_0A_0}{P_0}\frac{u}{\ell_0}\right)_p=\left(\frac{E_0A_0}{P_0}\frac{u}{\ell_0}\right)_m\cdots,\qquad \left(\frac{E_0A_0}{P_0}\phi_x\right)_p=\left(\frac{E_0A_0}{P_0}\phi_x\right)_m\cdots, \qquad (10)$$

(b)　断面力の相似則

$$\left(\frac{\overline{X}}{P_0}\right)_p=\left(\frac{\overline{X}}{P_0}\right)_m,\cdots\qquad \left(\frac{\overline{M}}{P_0\ell_0}\right)_p=\left(\frac{\overline{M}}{P_0\ell_0}\right)_m\cdots, \qquad (11)$$

(c)　応力，ひずみ e の相似則．

$$\left(\frac{\sigma A_0}{P_0}\right)_p=\left(\frac{\sigma A_0}{P_0}\right)_m,\qquad \left(\frac{eE_0A_0}{P_0}\right)_p=\left(\frac{eE_0A_0}{P_0}\right)_m \qquad (12)$$

(1)　ひずみ模型．立体骨組構造の模型実験を行う場合，通常，長さの相似は満足できても，実物と相似の断面形状を作成することが困難であろう。このような場合，断面形状については擬似相似のひずみ模型を作る必要がある。さて，長さと断面積については完全相似で，その縮尺が，K_A, K_L であるとする。少くとも，実物と模型の部材細長比が等しくならなければならない条件より．

$$\left(\frac{A_0\ell_0^2}{I_0}\right)_p=\left(\frac{A_0\ell_0^2}{I_0}\right)_m,\qquad \therefore\ K_A\cdot K_L^2=K_I=\frac{I_p}{I_m},\quad K_A=\frac{A_p}{A_m} \qquad (13)$$

平面骨組構造で，模型の断面が，縦 h，横 b の矩形であれば

$$I_m=\frac{bh^3}{12}=\frac{A_mh^2}{12}\qquad \therefore\ h=\sqrt{\frac{12I_p}{K_I\cdot A_m}},\qquad b=\frac{A_m}{h} \qquad (14)$$

(2)．比較設計．　活荷重の影響の小さい大型骨組構造において，はりの単位体積重量を w とすれば $P_0\propto w_0A_0\ell_0$ であるから，これを (12) 式に代入すれば，次式を得る。完全相似で，スケールが n 倍となれば，応力は n 倍となる．　$(\sigma/w_0\ell_0)_I=(\sigma/w_0\ell_0)_{II}$

本研究を行うにあたり，熊大工学部吉村虎蔵教授から示唆を受けたことを記し，謝意を表する。