

室蘭工業大学 正員 能町親雄

正員 松岡健一

学生員 田島照義

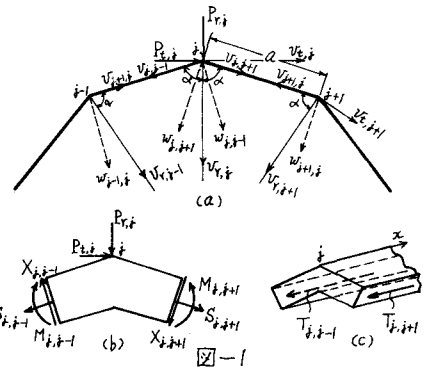
1. まえがき

薄肉多角筒体の応力解析には折板理論があるが、この理論は折板要素の平面応力部分については深さ方向の変長がないとして理論を簡素化しており、この要素を平面的にいか経集めても二次元応力問題には一致しない。また折板構造の横方向剛度についてはラーメン理論と類似の方法で取扱っているが、軸方向の曲率変化が無視されているので要素としていか経集めても平板曲げの基本微分方程式になることはできない。これと異なり、板要素を無限にとった場合、正確に平面応力の微分方程式になり、また曲げについては平板曲げの方程式になるように要素の変位表現を改良して、これを薄肉正多角形筒の応力解析に応用したものである。この場合、辺数を無限大に近づければ Timoshenko, Plates & Shells の(303)式と一致する。

2. 基本式

図-1に示す薄肉正多角形筒について考える。

折板理論による変位と諸力との関係は結果のみを示すと次の如くなる。



$$V_{t,i+1} = -V_{t,i} \sin \alpha + V_{r,i+1} \cos \alpha \quad (1)$$

$$V_{r,i+1} = V_{t,i} \sin \alpha + V_{r,i} \cos \alpha \quad (2)$$

$$w_{t,i+1} = V_{t,i} \cos \alpha + V_{r,i+1} \sin \alpha \quad (3)$$

$$w_{r,i+1} = -V_{t,i} \cos \alpha + V_{r,i} \sin \alpha \quad (4)$$

$$\theta_{t,i+1} = \frac{1}{a}(w_{t,i+1} - w_{t,i}) + \frac{a}{\delta N}(M_{t,i+1} + 2M_{t,i}) + \frac{\nu a}{\delta}(\ddot{w}_{t,i+1} + 2\ddot{w}_{t,i}) \quad (5)$$

$$\theta_{r,i+1} = \frac{1}{a}(w_{r,i+1} - w_{r,i}) - \frac{a}{\delta N}(M_{t,i} + 2M_{t,i+1}) - \frac{\nu a}{\delta}(\ddot{w}_{r,i+1} + 2\ddot{w}_{r,i}) \quad (6)$$

$$Et \ddot{v}_{t,i+1} = \frac{Et}{a}(\ddot{u}_i - \ddot{u}_{i+1}) + \frac{2}{a}(1+\nu)(S_{t,i+1} - S_{t,i}) - \frac{a}{\delta} \left[2 \{ \ddot{S}_{t,i+1}(1-\nu^2) - \nu Et \ddot{u}_i \} + \{ \ddot{S}_{t,i+1}(1-\nu^2) - \nu Et \ddot{u}_{i+1} \} \right] \quad (7)$$

$$Et \ddot{v}_{r,i+1} = \frac{Et}{a}(\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i) + \frac{2}{a}(1+\nu)(S_{t,i+1} - S_{t,i}) - \frac{a}{\delta} \left[2 \{ \ddot{S}_{t,i+1}(1-\nu^2) - \nu Et \ddot{u}_{i+1} \} + \{ \ddot{S}_{t,i+1}(1-\nu^2) - \nu Et \ddot{u}_i \} \right] \quad (8)$$

ここに u (x 方向)、 v , w は変位、 T , S はそれぞれせん断力および法線力である。

また δ は x による一度偏微分を表わし、 t は板厚、 a は辺幅、 E は弾性係数、 $N = Et^3/12(1-\nu^2)$ である。

3. 節点におけるつり合い

3.1 回転角のつり合い

$$\theta_{i,j+1} - \theta_{i,j-1} = 0 \quad (9)$$

上式に基本式を代入し、フーリエ変換を施して整理すると ($x=0, l$ で単純支持)、

$$\begin{aligned} & \frac{a}{6N} \{ \tilde{M}_{i+1} + 4\tilde{M}_i + \tilde{M}_{i-1} \} + \left\{ \frac{1}{a} - \frac{\nu a}{\delta} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \right\} \{ \tilde{u}_{t,i+1} - \tilde{u}_{t,i-1} \} \cos \alpha + \left\{ \frac{1}{a} - \frac{\nu a}{\delta} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \right\} \times \\ & \{ \tilde{u}_{r,i+1} - 2\tilde{u}_{r,i} + \tilde{u}_{r,i-1} \} \sin \alpha - \nu a \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \sin \alpha \cdot \tilde{u}_{r,i} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

3.2 接線方向の力のつり合い

$$P_{t,i} + (S_{i,j+1} - S_{i,j-1}) \sin \alpha - \{ X_{i,j+1} + X_{i,j-1} - N(1-\nu)(\theta_{i,j+1} + \theta_{i,j-1}) \} = 0 \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \therefore & \left\{ \frac{1}{a} - \frac{\nu a}{\delta} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \right\} \cos \alpha \{ \tilde{M}_{i+1} - \tilde{M}_{i-1} \} + \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \left\{ \frac{B}{A^2 - B^2} E t \sin^2 \alpha + 2(1-\nu) \frac{N}{a} \cos^2 \alpha - \right. \\ & \left. \frac{a}{\delta} (1-\nu^2) N \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \cos^2 \alpha \right\} \{ \tilde{u}_{t,i+1} - 2\tilde{u}_{t,i} + \tilde{u}_{t,i-1} \} + \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \left\{ \frac{2}{A-B} E t \sin^2 \alpha + \right. \\ & \left. 8(1-\nu) \frac{N}{a} \cos^2 \alpha + \frac{a}{3} (1+2\nu^2) N \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \cos^2 \alpha \right\} \tilde{u}_{t,i} - \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \left\{ \frac{B}{A^2 - B^2} E t - \right. \\ & \left. 2(1-\nu) \frac{N}{a} + \frac{a}{\delta} (1-\nu^2) N \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \right\} \cos \alpha \sin \alpha \{ \tilde{u}_{r,i+1} - \tilde{u}_{r,i-1} \} - \\ & \frac{AC+BD}{A^2 - B^2} E t \sin \alpha \{ \tilde{u}_{i+1} - \tilde{u}_{i-1} \} = \tilde{P}_{t,i} \end{aligned} \quad (12)$$

3.3 半径方向の力のつり合い

$$P_{r,i} + (S_{i,j+1} + S_{i,j-1}) \cos \alpha + (X_{i,j+1} - X_{i,j-1}) \sin \alpha = 0 \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \therefore & \frac{1}{a} \sin \alpha \{ \tilde{M}_{i+1} - 2\tilde{M}_i + \tilde{M}_{i-1} \} - \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \left\{ \frac{B}{A^2 - B^2} E t - (2-\nu) \frac{N}{a} + \frac{a}{\delta} N \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \right\} \cos \alpha \sin \alpha \times \\ & \{ \tilde{u}_{t,i+1} - \tilde{u}_{t,i-1} \} + \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \left\{ \frac{B}{A^2 - B^2} E t \cos^2 \alpha + (2-\nu) \frac{N}{a} \sin^2 \alpha - \frac{a}{\delta} N \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \sin^2 \alpha \right\} \times \\ & \{ \tilde{u}_{r,i+1} - 2\tilde{u}_{r,i} + \tilde{u}_{r,i-1} \} - \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \left\{ \frac{2}{A+B} E t \cos^2 \alpha + a N \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \sin^2 \alpha \right\} \tilde{u}_{r,i} + \\ & \frac{AC+BD}{A^2 - B^2} E t \cos \alpha \{ \tilde{u}_{i+1} - 2\tilde{u}_i + \tilde{u}_{i-1} \} + 2 \frac{C-D}{A+B} E t \cos \alpha \cdot \tilde{u}_i = -\tilde{P}_{r,i} \end{aligned} \quad (14)$$

3.4 x方向のせん断力のつり合い

$$T_{i,j+1} + T_{i,j-1} = 0 \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \therefore & -\frac{AC+BD}{A^2 - B^2} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \sin \alpha \{ \tilde{u}_{t,i+1} - \tilde{u}_{t,i-1} \} + \frac{AC+BD}{A^2 - B^2} \cos \alpha \{ \tilde{u}_{r,i+1} - 2\tilde{u}_{r,i} + \tilde{u}_{r,i-1} \} + \\ & 2 \frac{C-D}{A+B} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \cos \alpha \tilde{u}_{r,i} + \left\{ \frac{BC^2+BD^2+2ACD}{A^2 - B^2} - \frac{a}{\delta} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \right\} \{ \tilde{u}_{i+1} - 2\tilde{u}_i + \tilde{u}_{i-1} \} - \end{aligned}$$

$$\left\{ 2 \frac{(C-D)^2}{A+B} + a \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \right\} \tilde{u}_i = 0 \quad (16)$$

ここに、 $\tilde{M}_i$ は $\int_0^l M_i \sin \frac{m\pi}{l} x dx$ を表し、 m は正整数である。～記号は他も同様である。

また

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{\alpha} (1+\nu) + \frac{a}{3} (1-\nu^2) \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2, & C &= \frac{1}{\alpha} + \frac{\nu a}{6} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \\ B &= -\frac{2}{\alpha} (1+\nu) + \frac{a}{6} (1-\nu^2) \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2, & D &= \frac{1}{\alpha} - \frac{\nu a}{3} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \end{aligned}$$

4. 両端が単純支持されて、 $i=0$ における半径方向荷重のある場合

$\tilde{M}_i, \tilde{u}_{t,i}, \tilde{v}_{r,i}, \tilde{u}_i$ を次のように置く（正八角形筒の場合）。

$$\begin{aligned} \tilde{M}_i &= \sum_{j=1}^n \tilde{M}_i^* \cos \frac{2\pi i}{n} j, & \tilde{u}_{t,i} &= \sum_{j=1}^n \tilde{V}_{t,i} \sin \frac{2\pi i}{n} j, & \tilde{P}_{t,i} &= 0, \\ \tilde{v}_{r,i} &= \sum_{j=1}^n \tilde{V}_{r,i} \cos \frac{2\pi i}{n} j, & \tilde{u}_i &= \sum_{j=1}^n \tilde{U}_i \cos \frac{2\pi i}{n} j, & \tilde{P}_{r,i} &= \frac{\tilde{P}_{r,i}}{n} \sum_{j=1}^n \cos \frac{2\pi i}{n} j \end{aligned}$$

これらを(10)、(12)、(14)、(16)に代入して整理すると

$$\begin{aligned} \frac{a}{3N} (\cos \frac{2\pi i}{n} + 2) \tilde{M}_i^* + 2 \left\{ \frac{1}{\alpha} - \frac{\nu a}{6} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \right\} \cos \alpha \sin \frac{2\pi i}{n} \cdot \tilde{V}_{t,i} + \left\{ 2 \left\{ \frac{1}{\alpha} - \frac{\nu a}{6} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \right\} \times \right. \\ \left. \sin \alpha (\cos \frac{2\pi i}{n} - 1) - \nu a \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \sin \alpha \right\} \tilde{V}_{r,i} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} - 2 \left\{ \frac{1}{\alpha} - \frac{\nu a}{6} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \right\} \cos \alpha \sin \frac{2\pi i}{n} \cdot \tilde{M}_i^* + \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \left\{ 2 \left\{ \frac{B}{A^2-B^2} E t \sin^2 \alpha + 2(1-\nu) \frac{N}{\alpha} \cos^2 \alpha \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{a}{6} N \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 (1-\nu^2) \cos^2 \alpha \right\} (\cos \frac{2\pi i}{n} - 1) + \frac{2}{A-B} E t \sin^2 \alpha + 8(1-\nu) \frac{N}{\alpha} \cos^2 \alpha + \right. \\ \left. \frac{a}{3} (1+2\nu^2) N \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \cos^2 \alpha \right\} \tilde{V}_{t,i} + 2 \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \left\{ \frac{B}{A^2-B^2} E t - 2(1-\nu) \frac{N}{\alpha} + \frac{a}{6} (1-\nu^2) N \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \right\} \times \\ \cos \alpha \sin \alpha \sin \frac{2\pi i}{n} \cdot \tilde{V}_{r,i} + 2 \frac{AC+BD}{A^2-B^2} E t \sin \alpha \sin \frac{2\pi i}{n} \cdot \tilde{U}_i = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} - \frac{2}{\alpha} \sin \alpha (\cos \frac{2\pi i}{n} - 1) \tilde{M}_i^* + 2 \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \left\{ \frac{B}{A^2-B^2} E t - (2-\nu) \frac{N}{\alpha} + \frac{a}{6} N \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \right\} \\ \cos \alpha \sin \alpha \sin \frac{2\pi i}{n} \cdot \tilde{V}_{t,i} - \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \left\{ 2 \left\{ \frac{B}{A^2-B^2} E t \cos^2 \alpha + (2-\nu) \frac{N}{\alpha} \sin^2 \alpha - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{a}{6} N \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \sin^2 \alpha \right\} (\cos \frac{2\pi i}{n} - 1) - \left\{ \frac{2}{A+B} E t \cos^2 \alpha + a N \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \sin^2 \alpha \right\} \right\} \tilde{V}_{r,i} - \\ 2 E t \cos \alpha \left\{ \frac{AC+BD}{A^2-B^2} (\cos \frac{2\pi i}{n} - 1) + \frac{C-D}{A+B} \right\} \tilde{U}_i = \frac{\tilde{P}_{r,i}}{n} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \frac{AC+BD}{A^2-B^2} \sin \alpha \sin \frac{2\pi i}{n} \cdot \tilde{V}_{t,i} - 2 \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \left\{ \frac{AC+BD}{A^2-B^2} (\cos \frac{2\pi i}{n} - 1) + \frac{C-D}{A+B} \right\} \cos \alpha \cdot \tilde{V}_{r,i} - \\ \left[2 \left\{ \frac{BC^2+BD^2+2ACD}{A^2-B^2} - \frac{a}{6} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \right\} (\cos \frac{2\pi i}{n} - 1) - 2 \frac{(C-D)^2}{A+B} - a \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \right] \tilde{U}_i = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

以上(17)、(18)、(19)、(20)を連立に解き、次の逆変換により $M_i, u_{t,i}, v_{r,i}, u_i$ を求める。

$$M_i = \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \tilde{M}_{i,m}^* \sin \frac{m\pi}{l} x \cos \frac{2\pi i}{n} j,$$

$$V_{t,i} = \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \tilde{V}_{t,i} \sin \frac{m\pi}{l} x \sin \frac{2\pi i}{n} j$$

$$V_{r,i} = \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \tilde{V}_{r,i} \sin \frac{m\pi}{l} x \cos \frac{2\pi i}{n} j,$$

$$U_i = \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \tilde{U}_i \sin \frac{m\pi}{l} x \cos \frac{2\pi i}{n} j$$

5. 数値計算例

$l = 100 \text{ cm}$, $a = 5 \text{ cm}$, $t = 0.5 \text{ cm}$, $E = 3.7 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$, $\nu = 0.37$ の正三角形断面につい

て、sinusoidal load $p = \sin \frac{\pi x}{l}$ が作用した場合の結果を図-2に示す。

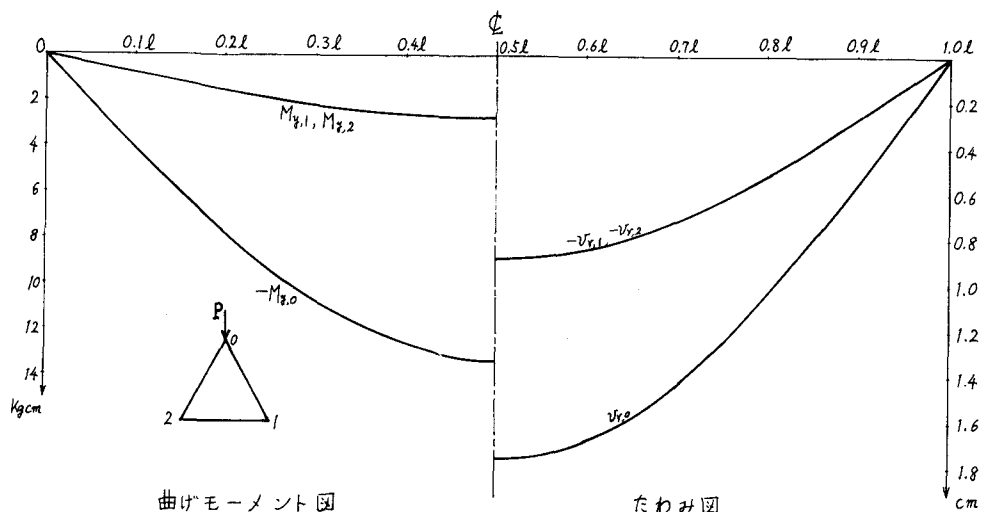


図-2

6. 結び

以上、折板要素によって薄肉多角筒体の応力に関する基本微分方程式を導いて、例として薄肉正三角形断面の曲げに応用したが、sinusoidal load に対して最大タワミは、はり理論に比べ本理論の結果が 2.6 % 大であったのは、本理論は式そのものにせん断力によるタワミも考慮されているので当然のことと言える。また上記の変換により (4π) 元の連立方程式を 4 元の連立方程式 $m \times n$ 回の解法に変換できるので計算上非常に有利である。

〔参考文献〕

- 1) On a Stress Analysis of Grid Plate by Finite Fourier Transforms Concerning Finite Integration, Sumio G. Nomachi, Proceeding of the Sixteenth Japan National Congress for Applied Mechanics, 1966.
- 2) On Bending of Multi-Equi-Cell Plate, Sumio G. Nomachi, Memories of the Murooran Institute of Technology, Vol. 6 No. 2 July 1968.