

I-124 ねじりをうける T 型接手の応力解析

埼玉大学 理工学部 正員 秋山成興

東京大学 工学部 正員 奥村敏恵

1. はじめに

近年、ハイフ構造は、その力学的合理性のゆえに多方面に使用され、T 型接手は構造物の利する所に見出される。しかし、このハイフの構造の応力解析は、ほとんど、されて居らず、早急に解決すべき構造工学上の問題と考えられる。

筆者等は一連の研究を通して、このテーマを取り上げ、いくつかの荷重の場合の解析を行ってきた。本研究もこれらの一環として行なったもので、次の二つの場合を取り上げる。

1. 板管をねじる場合

2. 半管をねじる場合

以下、これらの解析の概略を述べよう。

2. 基本方程式の解

応力解析は次の手順に従って行なう。実際の応力状態は膜応力状態と局部的な曲げ応力状態より成るものと考え、後者はいわゆる shallow shell の場合の基本方程式を用いて求める。

$$D \Delta \Delta \tilde{w} - i E h C C^{\alpha i} C^{\beta j} \nabla_i (\partial \alpha \partial_j \tilde{w}) = -\gamma n$$

今の場合、変数係数の偏微分方程式を解くことになるが、これを簡単化して、接合線と直交する測地法線方向に急激に減少する解を求める。これは次のように表わされる。

$$\tilde{Q}_{\psi\psi}^I = -\frac{i}{\varepsilon_I R} \frac{1-i}{\sqrt{2}} \frac{(\cos 2\varphi + \frac{r^2}{R^2} \sin^2 \varphi)(1 - \frac{r^2}{R^2} \sin^2 \varphi)^{1/2}}{(1 - \frac{r^2}{R^2} \sin^2 \varphi)^2} e^{\lambda_1(\varphi)} \frac{\beta}{\varepsilon_I} \tilde{\psi}_0^I(\varphi)$$

$$\tilde{Q}_{\psi\tau}^I = \frac{i}{\varepsilon_I r^2} \frac{1-i}{\sqrt{2}} \frac{\frac{r^2}{R^2} \sin \varphi \cos \varphi (\cos 2\varphi + \frac{r^2}{R^2} \sin^2 \varphi)}{(1 - \frac{r^2}{R^2} \sin^2 \varphi)^2} e^{\lambda_1(\varphi)} \frac{\beta}{\varepsilon_I} \tilde{\psi}_0^I(\varphi)$$

$$\tilde{Q}_{\tau\tau}^I = \frac{1}{C r} \frac{1 - \frac{r^2}{R^2} \sin^2 \varphi}{1 - \frac{r^2}{R^2} \sin^2 \varphi} e^{\lambda_1(\varphi)} \frac{\beta}{\varepsilon_I} \tilde{\psi}_0^I(\varphi)$$

$$\tilde{Q}_{\tau n}^I = \frac{i}{\varepsilon_I r^2} \frac{1-i}{\sqrt{2}} \frac{(1 - \frac{r^2}{R^2} \sin^2 \varphi)^{3/2}}{(1 - \frac{r^2}{R^2} \sin^2 \varphi)^{3/2}} e^{\lambda_1(\varphi)} \frac{\beta}{\varepsilon_I} \tilde{\psi}_0^I(\varphi)$$

$$\therefore \lambda_1(\varphi) = \frac{(1 - \frac{r^2}{R^2} \sin^2 \varphi)^{1/2}}{(1 - \frac{r^2}{R^2} \sin^2 \varphi)^{1/2}}, \quad \varepsilon_I = \sqrt{\frac{h}{3.305 r}}$$

$$\tilde{Q}_W^{\text{II}} = \frac{-i}{\varepsilon_{\text{II}} r^2} \frac{1-i}{\sqrt{2}} \frac{\{2(1-\frac{r^2}{R^2} \sin^2 \varphi) - (1-\frac{r^2}{R^2} \sin^4 \varphi)\}}{(1-\frac{r^2}{R^2} \sin^4 \varphi)^2} \cos \varphi e^{\lambda_2(\varphi)} \frac{\beta}{\varepsilon_{\text{II}}} \tilde{\psi}_0^{\text{II}}(\varphi)$$

$$\tilde{Q}_{\text{vt}}^{\text{II}} = \frac{i}{\varepsilon_{\text{II}} r^2} \frac{1-i}{\sqrt{2}} \frac{(1-\frac{r^2}{R^2} \sin^2 \varphi)^{1/2} \{2(1-\frac{r^2}{R^2} \sin^2 \varphi) - (1-\frac{r^2}{R^2} \sin^4 \varphi)\}}{(1-\frac{r^2}{R^2} \sin^4 \varphi)^2} \sin \varphi e^{\lambda_2(\varphi)} \frac{\beta}{\varepsilon_{\text{II}}} \tilde{\psi}_0^{\text{II}}(\varphi)$$

$$\tilde{Q}_{\text{tt}}^{\text{II}} = \frac{1}{CR} \frac{\cos^2 \varphi}{1-\frac{r^2}{R^2} \sin^4 \varphi} e^{\lambda_2(\varphi)} \frac{\beta}{\varepsilon_{\text{II}}} \tilde{\psi}_0^{\text{II}}(\varphi)$$

$$\tilde{Q}_{\text{vn}}^{\text{II}} = \frac{i}{\varepsilon_{\text{II}} R^2} \frac{1-i}{\sqrt{2}} \frac{\cos^3 \varphi}{(1-\frac{r^2}{R^2} \sin^4 \varphi)^{3/2}} e^{\lambda_2(\varphi)} \frac{\beta}{\varepsilon_{\text{II}}} \tilde{\psi}_0^{\text{II}}(\varphi)$$

しかし、 $\tilde{Q}^{\text{II}}$ の諸量は $\varphi = \frac{\pi}{2}$ では $\beta \rightarrow \infty$ の時 0 に収束しなくなるから物理的に意味がなくなる。この場合は、次の解を用いる。

$$\tilde{Q}_W^{\text{II}} = \frac{-ia}{\varepsilon_{\text{II}}^{2/3}} \frac{1}{r^2} \frac{\{2(1-\frac{r^2}{R^2} \sin^2 \varphi) - (1-\frac{r^2}{R^2} \sin^4 \varphi)\}}{(1-\frac{r^2}{R^2} \sin^4 \varphi)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{a}{2(1-\frac{r^2}{R^2})^{1/2}} \frac{(\frac{\pi}{2}-\varphi)^2}{\varepsilon_{\text{II}}^{2/3}} \right\} \cdot \exp \left\{ \frac{a\beta}{\varepsilon_{\text{II}}^{2/3}} \right\} \cdot$$

$$\cdot \left[\exp \left\{ -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{a^2(\frac{\pi}{2}-\varphi)}{\varepsilon_{\text{II}}^{1/3}} \right\} \tilde{A}_n + \exp \left\{ \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{a^2(\frac{\pi}{2}-\varphi)}{\varepsilon_{\text{II}}^{1/3}} \right\} \tilde{B}_n \right]$$

$$\tilde{Q}_{\text{vt}}^{\text{II}} = -\frac{ia^3}{\varepsilon_{\text{II}} r^2} \frac{1+i}{\sqrt{2}} \exp \left\{ -\frac{a}{2(1-\frac{r^2}{R^2})^{1/2}} \frac{(\frac{\pi}{2}-\varphi)^2}{\varepsilon_{\text{II}}^{2/3}} \right\} \exp \left(\frac{a\beta}{\varepsilon_{\text{II}}^{2/3}} \right) \cdot$$

$$\cdot \left[\exp \left\{ -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{a^2(\frac{\pi}{2}-\varphi)}{\varepsilon_{\text{II}}^{1/3}} \right\} \tilde{A}_n - \exp \left\{ \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{a^2(\frac{\pi}{2}-\varphi)}{\varepsilon_{\text{II}}^{1/3}} \right\} \tilde{B}_n \right]$$

$$\tilde{Q}_{\text{tt}}^{\text{II}} = \frac{ia^2}{\varepsilon_{\text{II}}^{4/3} r^2} \exp \left\{ -\frac{a}{2(1-\frac{r^2}{R^2})^{1/2}} \frac{(\frac{\pi}{2}-\varphi)^2}{\varepsilon_{\text{II}}^{2/3}} \right\} \cdot \exp \left(\frac{a\beta}{\varepsilon_{\text{II}}^{2/3}} \right) \cdot$$

$$\cdot \left[\exp \left\{ -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{a^2(\frac{\pi}{2}-\varphi)}{\varepsilon_{\text{II}}^{1/3}} \right\} \tilde{A}_n + \exp \left\{ \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{a^2(\frac{\pi}{2}-\varphi)}{\varepsilon_{\text{II}}^{1/3}} \right\} \tilde{B}_n \right]$$

$$\tilde{Q}_{\text{vn}}^{\text{II}} = -\frac{a^3}{Rr} \exp \left\{ -\frac{a}{2(1-\frac{r^2}{R^2})^{1/2}} \frac{(\frac{\pi}{2}-\varphi)^2}{\varepsilon_{\text{II}}^{2/3}} \right\} \cdot \exp \left(\frac{a\beta}{\varepsilon_{\text{II}}^{2/3}} \right) \cdot$$

$$\left[\exp \left\{ -\frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{a^2(\frac{\pi}{2}-\varphi)}{\varepsilon_{\text{II}}^{1/3}} \right\} \tilde{A}_n + \exp \left\{ \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{a^2(\frac{\pi}{2}-\varphi)}{\varepsilon_{\text{II}}^{1/3}} \right\} \tilde{B}_n \right]$$

$$\lambda_2(\varphi) = \frac{\cos \varphi}{(1-\frac{r^2}{R^2} \sin^4 \varphi)^{1/2}}, \quad \varepsilon_{\text{II}} = \sqrt{\frac{\hbar_{\text{II}} R}{3.305 r^2}}$$

さて、これらの解はどのような物理現象に対応するかを吟味すると、 $R \rightarrow \infty$ の時 $\tilde{Q}_{tt}^I$ を除いてすべて 0 になる。つまり半径 r の枝管に平板が接合した状態から今問題としている構造に変化した場合に生ずる応力状態を表わす。

したがって基本応力状態としては図-1に示めすものを選びかねばならぬ。

次にこの場合の

応力状態を求めよ。

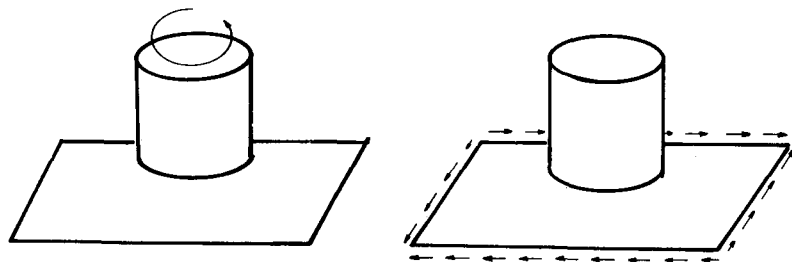


図-1

3. 基本応力状態

$\xi = \text{const.}$ に edge 荷重の作用する場合の $\pi/4$ の応力状態は次のように表わされる。

本管ねじりの場合

$$\tilde{Q}_{\theta\theta}^I = \{-4i\xi^2 \tilde{C}_1 e^{r_1\theta} + (1+4i\xi^2) \tilde{C}_2 e^{r_2\theta}\} \sin 2\varphi$$

$$\tilde{Q}_{r\theta}^I = \frac{1}{2} \{-4i\xi^2 r_1 \tilde{C}_1 e^{r_1\theta} + (1+4i\xi^2) r_2 \tilde{C}_2 e^{r_2\theta}\} \cos 2\varphi$$

$$\tilde{Q}_{tt}^I = \{(1+4i\xi^2) \tilde{C}_1 e^{r_1\theta} - 4i\xi^2 \tilde{C}_2 e^{r_2\theta}\} \sin 2\varphi$$

$$\tilde{Q}_{\theta m}^I = i\xi^2 (r_1 \tilde{C}_1 e^{r_1\theta} + r_2 \tilde{C}_2 e^{r_2\theta}) \sin 2\varphi$$

枝管ねじりの場合 おへて 0

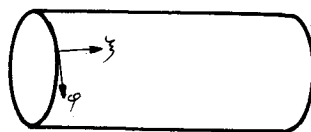


図-2

また、平板の応力状態は次のように表わされる。

本管ねじりの場合

$$\tilde{Q}_{\theta\theta}^{\text{II}} = \tilde{B}_0 \rho^{-2} - (6\tilde{B}_2 \rho^{-4} + 4\tilde{D}_2 \rho^{-2}) \sin 2\varphi + \rho \sin 2\varphi$$

$$\tilde{Q}_{r\theta}^{\text{II}} = (6\tilde{B}_2 \rho^{-4} + 2\tilde{D}_2 \rho^{-2}) \cos 2\varphi + \rho \cos 2\varphi$$

$$\tilde{Q}_{tt}^{\text{II}} = -\tilde{B}_0 \rho^{-2} + 6\tilde{B}_2 \rho^{-4} \sin 2\varphi - \rho \sin 2\varphi$$

$$\tilde{Q}_{\theta m}^{\text{II}} = 8\tilde{D}_2 \rho^{-3} \sin 2\varphi$$

枝管ねじりの場合

$$\tilde{Q}_{r\theta}^{\text{II}} = \tilde{B}_0 \rho^{-2}$$

その他はおへて 0.

次に膜応力状態は次のように表わされる。

車管ぬいりの場合

$$\tilde{Q}_{\psi\psi}^{\text{II}} = S \frac{\sin 2\varphi (1 - \frac{r^2}{R_2^2} \sin^2 \varphi)^{1/2}}{1 - \frac{r^2}{R_2^2} \sin^2 \varphi}, \quad \tilde{Q}_{\psi t}^{\text{II}} = -S \frac{\cos 2\varphi + \frac{r^2}{R_2^2} \sin^4 \varphi}{1 - \frac{r^2}{R_2^2} \sin^2 \varphi}$$

$$\tilde{Q}_{tt}^{\text{II}} = -S \frac{\sin 2\varphi (1 - \frac{r^2}{R_2^2} \sin^2 \varphi)^{1/2}}{(1 - \frac{r^2}{R_2^2} \sin^2 \varphi)}, \quad \tilde{Q}_{\psi n}^{\text{II}} = 0$$

枝管ぬいりの場合

$$\tilde{Q}_{\psi\psi}^{\text{I}} = S \frac{\frac{r}{R} \sin 2\varphi (1 - \frac{r^2}{R_2^2} \sin^2 \varphi)^{1/2}}{1 - \frac{r^2}{R_2^2} \sin^2 \varphi}, \quad \tilde{Q}_{\psi t}^{\text{I}} = -S \frac{2(1 - \frac{r^2}{R_2^2} \sin^2 \varphi) - (1 - \frac{r^2}{R_2^2} \sin^2 \varphi)}{1 - \frac{r^2}{R_2^2} \sin^2 \varphi}$$

$$\tilde{Q}_{tt}^{\text{I}} = -S \frac{\frac{r}{R} \sin 2\varphi (1 - \frac{r^2}{R_2^2} \sin^2 \varphi)^{1/2}}{1 - \frac{r^2}{R_2^2} \sin^2 \varphi}, \quad \tilde{Q}_{\psi n}^{\text{I}} = 0$$

4. 積分常数の決定，複素接合条件

荷重，構造物の対称性を考慮すると，枝管ぬいり，車管ぬいりのいずれの場合においても，二軸対称の応力状態が生ずる。したがって $\tilde{\psi}_0(\varphi)$ は次の形をもつ。

$$\tilde{\psi}_0(\varphi) = \sum_{k=1} \tilde{X}_k \sin 2k\varphi$$

$\tilde{X}_k$ は積分常数であるが，これを具体的に定めることができれば問題は解決ことになる。これらは接手の接合線上において応力と変形が連続であるという条件より求められる。これを具体的に書くと次のようになる。

$$\{\tilde{Q}_{tt} - \nu \tilde{Q}_{\psi\psi}\}^{\text{I}} = \{\tilde{Q}_{tt} - \nu \tilde{Q}_{\psi\psi}\}^{\text{II}}, \quad \tilde{Q}_{\psi t}^{\text{I}} = -\tilde{Q}_{\psi t}^{\text{II}}$$

$$\tilde{Q}_{\psi\psi}^{\text{I}} = \tilde{Q}_{\psi\psi}^{\text{II}} \frac{r}{R} \sin^2 \varphi + \tilde{Q}_{\psi n}^{\text{II}} (1 - \frac{r^2}{R_2^2} \sin^2 \varphi)^{1/2}, \quad \tilde{Q}_{\psi\psi}^{\text{I}} \frac{r}{R} \sin^2 \varphi + \tilde{Q}_{\psi n}^{\text{I}} (1 - \frac{r^2}{R_2^2} \sin^2 \varphi)^{1/2} = \tilde{Q}_{\psi\psi}^{\text{II}}$$

また，Simple Edge Effect と Generalized Edge Effect の境界線上で

$$\{\tilde{w}\}_{\text{gen.}} = \{\tilde{w}\}_{\text{Sim.}} \quad \left\{ \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \varphi} \right\}_{\text{gen.}} = \left\{ \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \varphi} \right\}_{\text{Sim.}}$$

今，接合線上で n 回の号を置けば $(4n+2)$ 元連立方程式が得られ，これを解けば $\tilde{X}_k$ が得られ，これより応力，変形量が求められる。