

北大工学部 正員 岡村 仁
 北海学園大 " 本多 祐也
 北大工学部 " 奥村 勇

1. 緒言 平板構造は土木、建築をはじめ多くの分野で用いられている構造要素でありその研究も数多くある。著者も扇形平板の曲げについてその研究成果を発表して来たが、板に作用する荷重が部分分布荷重とか放射方向の線荷重については未だ発表していなかった。この報告は平板の特異解の応用により部分荷重を担う扇形平板の挙動についてである。平板の曲げの問題は4階の偏微分方程式を解くことにより解が得られる。偏微分方程式の境界値問題を解く有力な方法の一つにGreen関数による方法があり、平板については円板の曲げの問題に応用した例が発表されている¹⁾。以下主として線荷重による曲げの問題を解析した。

2. 放射方向の線荷重を担う扇形平板の曲げ 平板の曲げの微分方程式は極座標を採用すると次のようになる。

$$\Delta \Delta w(r, \theta) = \frac{q(r, \theta)}{D}, \quad \text{ここで } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad \dots (1)$$

$$D = \text{板の曲げ剛性} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

w はたわみ, $q(r, \theta)$ は分布している荷重強度である。

方程式(1)の特異解 (Green関数の主要解) は
$$\frac{1}{8\pi D} R^2 \log R \quad \dots \dots (2)$$

で与えられるので特異解 w_p は次のようになる。(図-1参照)

$$w_p = \frac{1}{8\pi D} \iint_{(A)} R^2 \log R \cdot \frac{q(r', \theta')}{D} dA \quad \dots \dots (3)$$

ここで $(r', \theta') = dA$ の座標, $R = (r, \theta)$ と (r', θ') との距離

$$= [r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')]^{\frac{1}{2}}$$

この特解と同次方程式の解 $w_c(r, \theta)$ を重ね合わせて扇形平板の曲げの解

を次のように求めることができる。
$$w(r, \theta) = w_c + w_p = \sum (A_m r^m + B_m r^m + C_m r^{m+2} + D_m r^{m+2}) \cos m\theta + w_p \quad \dots (4)$$

図-2のような線荷重の場合は式(3)の積分の際、 $\theta = 0$ でのみ p なる強度で他の領域では0であるのでこの積分に当ってはDiracの δ 関数を使う。

$$w_p = \frac{1}{8\pi D} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_b^a \{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')\} \log \{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')\}^{\frac{1}{2}} \times p(r') \cdot \delta(\theta') dr' \cdot r' d\theta' = \frac{1}{16\pi D} \int_b^a f(r', \theta') dr' \quad \dots (5)$$

ここに $f(r', \theta') = p(r') (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta) \cdot \log (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta)$ 。
 $f(r', \theta')$ を θ に関するフーリエ級数に展開する。例えば $b < r' < r$ の場合には $r'/r = \xi < 1$ であり、次のようになる。³⁾ ($r = \rho a, r' = \rho a, m \geq 2$)

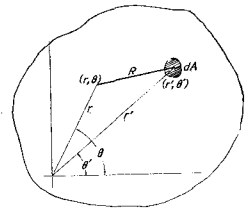


図-1

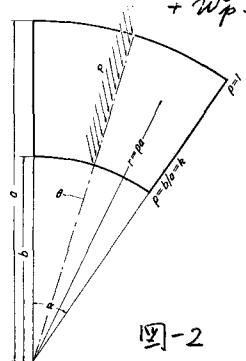


図-2

$f(r, \theta) = 2r^2 p(r) [K_0 + \sum_m K_m \cos m\theta]$ に $K_m = \frac{1}{m(m-1)} \cdot \frac{p^m}{p_0^m} \{m+1 - (m-1) \frac{p^2}{p_0^2}\}$ (6)
 式(6) および $r < r' < a$ の場合 なら $r' = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1$ の場合 に対し得られる式を式(5) に代入し、 $p(r) = p = \text{const.}$ の場合 について計算し扇形平板の中心角を α とし、フーリエ級数展開を

$w_p = \frac{2}{\alpha} \sum_{\beta} \frac{p}{8D} \cdot \gamma_{\beta}(p) \cdot \cos \beta \theta$, $\therefore \beta = \frac{n\pi}{\alpha}$, $n = 1, 2, 3, \dots, \dots$ (7)
 の形で表わすと $\gamma_{\beta}(p)$ の値は $\beta \geq 4$ に対し

$$\gamma_{\beta}(p) = \frac{a^3}{\beta(\beta-1)} \left\{ \frac{8p}{(\beta^2-9)} p^3 - p\beta \left(\frac{\beta+1}{\beta-3} - p^2 \right) - \right. \\ \left. - p^{\beta+1} p^{\beta} (p^2 - \frac{\beta-1}{\beta+3} p^3) \right\} \dots (8)$$

となる。こうして求めた w_p と w_c を重ね合せ、 w_c に含まれる 4 つの未定係数を 2 点弧辺の境界条件から決定すれば所要の解が得られる。この方法を応用して数値計算例を行なったがその数値を末すと図-3 以下である。

3. 文献 1) : Saito, Kanakami : Proc. J.N.C.A.M. 1955, 1956

2) : R. Courant u. Hilbert : Methoden der mathematischen Physik, I, Kap. V

3) 芳村, 本多 : 工本学会北海道支部論文集昭和三

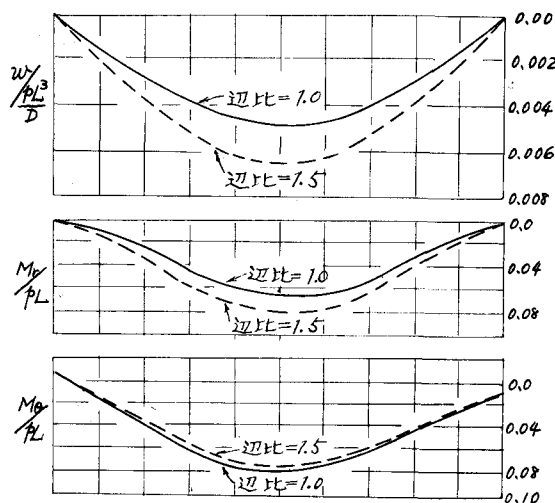
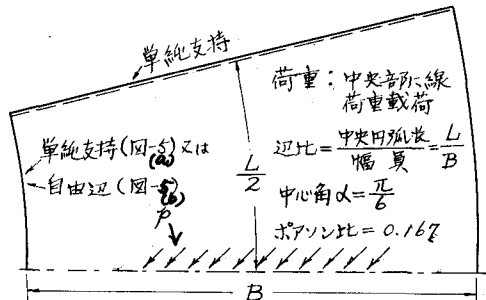
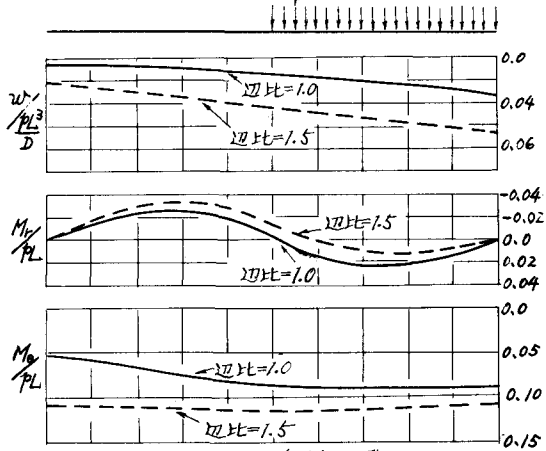
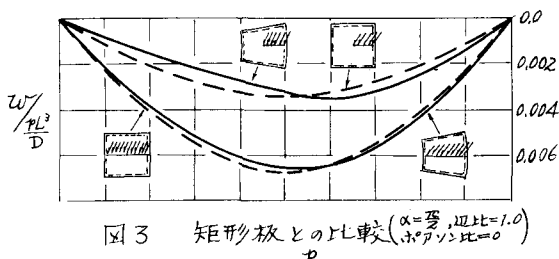


図-5(a) 二円弧辺単純支持の場合

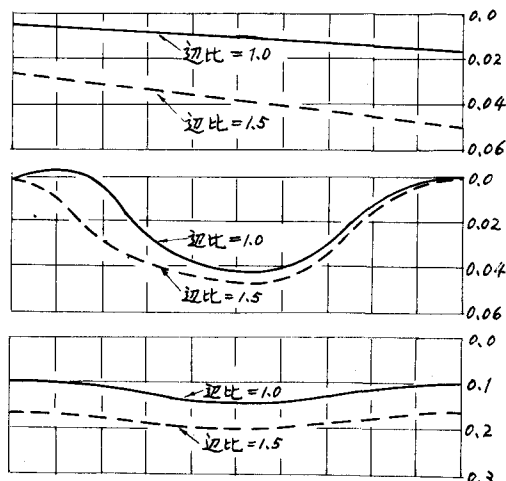


図-5(b) 二円弧辺自由の場合