I-115 Hermitian 階差法による構造物の解析

岐阜大学工学部　正員　井上 肇

解析的には扱いにくい構造物（たとえば板やシェル）を数値的に解析するには，階差法や Finite Element 法が用いられている。前者は，構造物のつり合いや変形についての適合条件から得られる微分方程式の，有限個の点での，階差表現の代数学的な取り扱いであって，どちらかと云えば，微分方程式の数学的近似である。一方，後者は構造物の物理的近似であると云える。この両者において着目点の数を同一にした場合，現われてくる未知量の数は F.E.M. の方が多く，また当然ではあるが，その精度が高いことは容易に推察しうる。しかしこゝで取扱うべき未知量の数は F.E.M. の方が階差法にくらべて多く（はり 1:2，板 1:3，シェル 3:5），この面から考えると，同数の未知量で計算したときの精度の優劣を考えるとき，必らずしも F.E.M. に圧倒的な精度の保障はない。そこに階差法が生き残りうる活路がある。さらに，その階差法に多少の改良を加えることによって F.E.M. と同程度あるいは，それ以上の精度の確保を指向することになる。

微分方程式を階差式に表現することは，導関数の階差表現によって行なわれる。すなわち，解の関数の Taylor 展開式によって，その基礎が与えられている。通常用いられている導関数の階差表示は，つぎのようにして求められている。

$$f(x \pm h) \doteqdot f(x) \pm f'(x)\cdot h + f''(x)\cdot h^2/2! \qquad (1)$$

(1) より

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad \left(-\frac{1}{6}h^2 f'''(x)\right), \qquad f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \quad \left(-\frac{1}{12}h^2 f^{(4)}(x)\right) \qquad (2)$$

（ ）内は評価した誤差であって，階差法による微分方程式の解の精度は (2) よりも解かるが，選んだ点の間隔 h に関係してくる。そこでもっと高精度で導関数を階差表示すればよいわけであって，さきの Taylor 展開式の項数をもっと多くとればよい。n 階の導関数を階差で与えるときの一般的な表現は (1)，(2) と同じ過程を用いて

$$f^{(n)}(x) = \alpha \sum_{i=-S_1}^{S_2} a_i f(x+ih) \qquad (3)$$

として示されるが，高精度を要求すればするほど，与点の巾 S_1+S_2+1 が広がり，とくに境界附近の点における導関数の表現に困難を来たすことになる。したがって余り広い巾をとることができず，したがって実際に精度の向上は期待できない。（1, 2, 4 階の導関数の階差表示を表-1 に示す）

階差法の改良のうちで，Hermitian 法（Mehrstellenverfahren）は (3) を拡張し

$$\sum_{i=-S_1}^{S_2} a_i f(x+ih) + \sum_{j=-S_3}^{S_4} A_j f^{(n)}(x+jh) = 0 \qquad (4)$$

とおき，$f(x+ih)$，$f^{(n)}(x+jh)$ 等の Taylor 展開式によって，a_i．A_j を定めればよい。この方法によればすくない f の点数で，より高い精度の導関数の階差表示を得ることができる。（表-1，H の部分）

このような考え方からは，Hermitian 階差式 (4) は，つぎのように一般化することができる。

$$\sum_{k=1}^{m} \left\{ \sum_{i=S_{k1}}^{S_{k2}} A_{ki} f^{(k)}(x+ih) \right\} + \sum_{i=S_{01}}^{S_{02}} a_i f(x+ih) = 0 \qquad (5)$$

S_{ki} ; k 階導関数をとるべき巾

表－1　導関数の階差表示の係数[1]

n	A_{-1}	A_0	A_1		a_{-3}	a_{-2}	a_{-1}	a_0	a_1	a_2	a_3	Error
1		1		$-1/12h$		1	−8	0	8	−1		$h^4 f^{(4)}/30$
2		1		$-1/12h^2$		−1	16	−30	16	−1		$h^4 f^{(6)}/90$
2		1		$-1/180h^2$	2	−27	270	−490	270	−27	2	$-h^6 f^{(8)}/560$
4		1		$-1/h^4$		1	−4	6	−4	1		$-h^2 f^{(6)}/6$
H 1	1	4	1	$3/h$			1	0	−1			$h^4 f^{(5)}/30$
H 1	1	3	1	$1/12h$		1	28	0	−28	−1		$-h^6 f^{(7)}/420$
H 2	1	10	1	$-12/h^2$			1	−2	1			$h^4 f^{(6)}/20$
H 2	2	11	2	$-3/4h^2$		1	16	−34	16	1		$23h^6 f^{(8)}/5060$
H 4	1	4	1	$-6/h^4$		1	−4	6	−4	1		$h^4 f^{(8)}/120$

表－2．行列 $\boldsymbol{A}_1$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 & & & & \\ & 1 & 10 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 10 & 1 & \\ & & & & 1 & 10 & 1 \end{bmatrix}$$

(5)によって，$f^{(0)}\sim f^{(n)}$についての境界条件をもとり入れて，計算することができ，十分に大きいnをもったfの群で導関数を表わすことができる。

構造物の数値的な近似解の精度の判定については，たとえば階差解のときには微分商のもつ誤差を評価し，それらの全構造物に対する影響をもとめることは，割合に簡単な構造物においては不可能ではない。しかし，これらは相当に面倒であるため，得られた近似解と正確解との比較によって行なわれているが，これも一般には静的な載荷のときのみが検討されているが，自由振動状態における固有振動数とモードのもつ近似度をも評価して，綜合的な形で検討する必要があろう。

例として，単純ばりの場合を考える。はりの基礎微分方程式は

$$d^2M/dx^2 = -p_x \quad (6), \qquad d^2y/dx^2 = -M_x/EI_x \quad (7) \qquad I\text{が一定なら}\ d^4y/dx^4 = p_x/EI \quad (8)$$

(6),(7)のはり全体についての階差表示は

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{M}'' = \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{M} \quad (9), \qquad \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{Y}'' = \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{Y} \quad (10) \quad (\text{単純ばりのとき}\ \boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{A}_1,\ \boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{A}_2)$$

$$-\boldsymbol{P} = \boldsymbol{M}'' = \boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{M}, \qquad \boldsymbol{Y}'' = \boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{Y}, \qquad \boldsymbol{M} = -EI_c\boldsymbol{K}\boldsymbol{Y}'' = -EI_c\boldsymbol{K}\boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{Y} \quad (11)$$

$$\therefore\ \boldsymbol{P} = EI_c\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{K}\boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{Y} = EI_c\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y} \quad \text{あるいは} \quad \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}/EI_c \quad (12)$$

ここで，$\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2$は表－1から得られる係数行列，$\boldsymbol{P}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{Y}$；荷重，曲げモーメント，たわみベクトル，$\boldsymbol{K}$；$k_i = I_i/I_c$を対角要素にもつ行列．（$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{K}\boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{B}_2$）

境界条件として $M_0 = M_{n+1} = 0$，$y_0 = y_{n+1} = 0$ とすれば $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{M}$等は表－2の破線の中だけで表わされる．この方法で得られた結果は，きわめて高精度で，Flexibility Matrix は8ケタまで正確であり，振動モードも低次（1〜2次）も同様である。また固有振動数は1次で誤差率が −0.0041%（10等分），2次で −0.066%，3次では −0.24%，であった。同じ分割での普通階差によるものは たわみで1〜2%，固有振動数ではそれぞれ −0.82，−3.24 −7.18% であり，20等分の −0.25，−0.81，−1.67% に比べて，はるかに高精度であることがわかる．

単純ばりのときには，境界条件がきわめて都合よいが，固定端をもつときには，$\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{B}_1$等が正方行列とはならず，逆行列がもとめられず，たとえば次のような工夫を必要とする．すなわち，端点において，非対称な分点をもった導関数の階差表示を用いて行列の正方化が行なわれるが，この方法も普通階差のときには，よい精度を与えないので，十分の注意を要する．

固定端をもつはり，アーチ，板等への応用については講演当日にゆずる．

参考文献

1) Collatz, L.; The Numerical Treatment of Differential Equations, 3rd ed. 1966