

I-113 構造解析におけるウェイト・マトリックスに関する研究

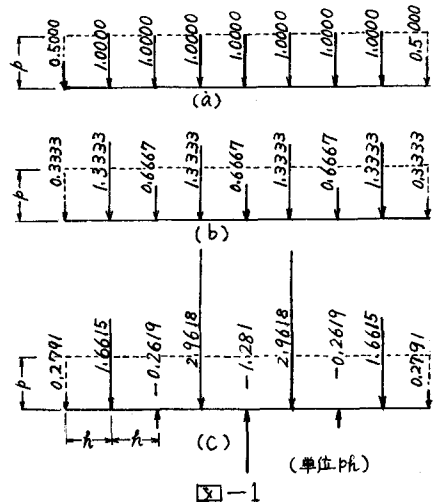
東北大学工学部 正 員 佐武正雄
東北大学大学院 学生員 ○新聞 茂

1. まえがき

構造解析において 分布量を離散量におきかえたり、又はこの逆の変換を行う必要に迫られることが多い。連続体の多質点系への置換 あるいは、有限要素法等における分布荷重から集中荷重系への置換はその例である。著者らはこれらの等価置換問題が高精度で行なわれるように その基礎となるウェイト・マトリックスについて考察して来たが 本文では別の立場から考察を加え、更にその応用例について述べる。

2. 従来の数値積分法の検討

分布量から離散量への置換には 従来主として数値積分の公式を用いることが多かったが、この方法は、単に被積分函数の代表値にある weight(重み)をかけて、加え合せただけのものであるから 分割を細かくして、多分割公式を用いればその全体の和は、積分値に良く近似させることができるが、その weight のかけ方は 非常に不規則なものとなっている。こうした考え方による等価置換を力学的な問題に適用して数値解析を行うことは、非常に不自然な結果を与えることになる。一例として数値積分公式の一つである Newton-Cotes 式の $n=2$ (台形則), $n=3$ (Simpson 則), $n=9$ の場合に対し、梁の場合について、等分布荷重から集中荷重列への等価置換例を示せば図-1 のようになる。



3. 高精度差分式を応用したウェイト・マトリックスの求め方

まず分布荷重 から集中荷重列への換に 関する等価置換の問題を考える。換みを $y(x)$, 分布荷重を $p(x)$ とし 分割点(等分割とする)での値を (y_i) (p_i) 等価な集中荷重列を (P_i) Stiffness Matrix を S とすれば

$$(E) = S(y_i) \quad (3.1)$$

一方分布荷重に対しては

$$D\{y(x)\} = p(x) \quad (3.2)$$

ここに $D = EI d^4/dx^4$ であるから 微分演算子 D に対し 高精度差分式を用いて (3.2)式を書きかえれば

$$A(y_i) = h(p_i) \quad (3.3)$$

$|A| \neq 0$ であれば

$$(y_i) = h A^{-1}(p_i) \quad (3.4)$$

(3.1), (3.4)両式において (y_i) が各分割点において等しい

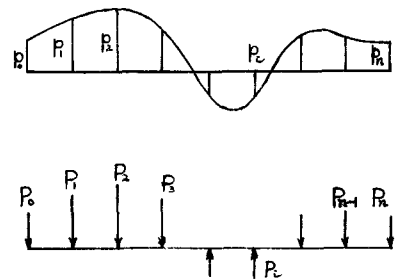


図-2

ものとすれば

$$(R) = k W (R) \quad (3.5)$$

ここに

$$W = S A^T \quad (3.6)$$

であり、 W は、梁の撓みに関するウェイト・マトリックスである。 W が正方正則行列ならば与えられた集中荷重列に対して

$$(R) = \frac{1}{k} W^{-1} (R) \quad (3.7)$$

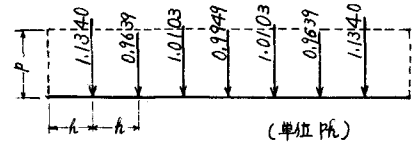


図-3

として、集中荷重列と撓みに関して等価な分布荷重のベクトルを求めることもできる。単純梁を8等分した場合の撓みに関するウェイト・マトリックスを下に示す。又その他の力学的諸量、撓み角、モーメント、せん断力等に関しても上記のような等価置換を行うことができる。(3.8)式のウェイト・マトリックスによつて等分布荷重から集中荷重列への等価置換を行えば図-3に示すようになる。なお、(3.6)式からも明らかのように、ここに求めたウェイト・マトリックスは荷重とは無関係なものであることに注意する。その他、種々のケースについてウェイト・マトリックスを計算したが、ここでは紙面の都合で省略する。

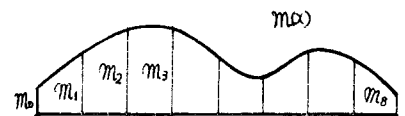
$$W = \begin{bmatrix} 0.1238 & 1.0274 & -0.0264 & 0.0115 & -0.0031 & 0.0008 & -0.0002 & 0.0001 & 0.0000 \\ -0.0287 & -0.0264 & 1.0390 & -0.0295 & 0.0128 & -0.0033 & 0.0009 & -0.0002 & -0.0001 \\ 0.0077 & 0.0115 & -0.0295 & 1.0398 & -0.0297 & 0.0124 & -0.0033 & 0.0008 & 0.0006 \\ -0.0021 & -0.0031 & 0.0123 & -0.0297 & 1.0399 & -0.0297 & 0.0124 & -0.0031 & -0.0021 \\ 0.0006 & 0.0008 & -0.0033 & 0.0124 & -0.0297 & 1.0398 & -0.0295 & 0.0115 & 0.0077 \\ -0.0001 & -0.0002 & 0.0009 & -0.0033 & 0.0124 & -0.0295 & 1.0390 & -0.0264 & -0.0287 \\ 0.0000 & 0.0001 & -0.0002 & 0.0008 & -0.0031 & 0.0115 & -0.0264 & 1.0274 & 0.1238 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

4. 応用例(周辺固定板の辺上のモーメントについて)

単純支持板の辺上に集中モーメント荷重列が作用した場合、撓み角に関して、それと等価な分布モーメントを求める問題を考える。辺上に集中モーメント M_i が作用した時の各点の撓み角 θ_i は

$$(\theta)_i = K_i (M)_i \quad (4.1)$$

K_i は単純支持板の周辺のモーメントと撓み角に関するGreen函数 $K_i(s, s_0)$ (s, s_0 は単純支持板の周辺上の一点からの長さを表わすパラメーターである)から求めることができる。一方分布荷重に対しては、そのまま取扱うことが難しいので一辺上の分布荷重を図-4に示すように階段函数で近似すれば



(a) 分布モーメント $m(x)$



(b) $m(x)$ の階段函数近似

図-4

$$m(x) = m_0 + \sum_{i=1}^8 (m_i - m_{i-1}) U(x - \frac{2i-1}{2}h) \quad (4.2)$$

固定板の角ではモーメントがゼロであるから 8 等分の場合 $m_0 = m_8 = 0$ として (4.2) 式の Fourier 係数を求めれば

$$E_m = \frac{2}{m\pi} \sum_{i=1}^7 m_i (\cos \frac{2i-1}{16} m\pi - \cos \frac{2i+1}{16} m\pi) \quad (4.3)$$

となり 文献(4)の (176)式を用いれば、撓み角 θ_i と分布モーメント荷重 m_i として次の表現を与えることができる。

$$(\theta)_2 = h K_2 (m_i) \quad (4.4)$$

(4.1) と (4.4) 式を等置すれば ($|K_2| \neq 0$ であるから)

$$(m_i) = \frac{1}{K} W^T (M_i) \quad (4.5)$$

$$W^T = K_2^T K \quad (4.6)$$

を得る。 W^T は単純支持板の周辺上の撓み角に関して、集中モーメント列と等価な分布モーメントを与える ウェイト・マトリックスである。周辺 C 上に分布モーメント $m(s_0)$ を受ける場合、単純板边上の撓み角は Green 関数 $K_1(s, s_0)$ を用いて

$$\theta(s) = \int_C K_1(s, s_0) m(s_0) ds_0 \quad (4.7)$$

と表わすことができる。今与えられた荷重に対する固定板の边上の曲げモーメントを算定するために、固定板と同一の分布モーメント荷重を受ける単純板边上の撓み角を $\theta(s)$ とする。この $\theta(s)$ に対して (4.7) 式の $m(s_0)$ を求めることは、オー種 Fredholm 型の積分方程式となり、これを解析的に解くことは、困難であるから 周辺をいくつか (計算例では図-5に示すように 28個) の支持点 C_i に置き換え、分布モーメント反力を集中モーメント反力 M_i におきかえれば、(4.7)式は

$$\theta_i = \sum_{j=1}^n K_{ij} M_j \quad (4.8)$$

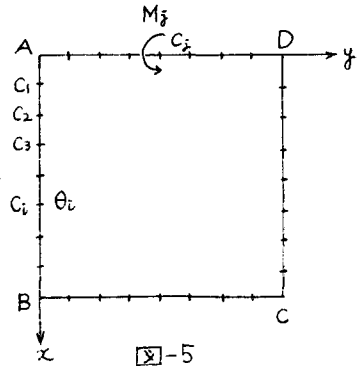
となり (4.1)式に帰する。(4.8)式は未知数 M_j に関する連立一次方程式であるから、これを解いて集中モーメント反力

M_j を求めることができる。計算例では、等分布荷重 q を受ける正方形板 ($a \times a$) を図-5のように分割して計算を行ったが、このときの集中モーメント反力は、一辺について

$$qa^3 \times 10^{-3} \times (-1.447, -4.076, -5.882, -6.494, -5.882, -4.076, -1.447)$$

となる。これに (4.6) 式のウェイト・マトリックスを用いて 等価な分布モーメントを求めれば 一辺について

$$qa^3 \times 10^{-3} \times (-1.138, -3.263, -4.684, -5.172, -4.684, -3.263, -1.138)$$



正方形固定板の負最大曲げモーメント

本文の方法 (8×8)	有限要素法 (8×8)	Timoshenko
0.5172	0.503	0.513

表-1

を得る。表-1 は、負の最大曲げモーメントについて、有限要素法³⁾、Timoshenko⁴⁾の解との比較を示す。上記の例題のように、 θ_i から M_i を求める問題では、(4.4)式から直接計算する方がよいが、別の解法(例えば、有限要素法)で M_i が求められているような場合には、例題で説明したように(4.6)式のウェイト・マトリックスを用いて分布モーメントに換算するのが合理的と思われる。なお、 K の i 成分 K_{ii} は、そのままでは ∞ となるので、有限値となるような修正を考慮している。

5. 考察

以上、分布量と離散量との等価置換において、重要な役割をもつウェイト・マトリックスについて、主として差分法を用いる方法や、応用例を述べたが、更に次のような問題についての検討が必要と思われる。

(1) 2種類(またはそれ以上)の量に關する等価置換の問題

これは例えば、力とモーメントの2種類の量を考え、撓みと撓み角について等価におきかえる問題で、より合理的な置換が得られると思われる。

(2) ウェイト・マトリックスの固有ベクトルの性質について

ウェイト・マトリックスの固有ベクトルについては、考える問題のGreen函数の固有函数と近似したものとなっていると思われる。このことは次のようにして示される。すなわち、分布量に關する写像(例えば、荷重 $p(x) \rightarrow$ 撓み $y(x)$)が

$$y(x) = \int_a^b K(x, x_1) p(x_1) dx_1 \quad (5.1)$$

また、離散量によるもの(すなわち集中荷重列 $P_i \rightarrow$ 撓み y_i)は同一のGreen函数を用いて

$$y_i = \sum_{j=1}^n K_{ij} P_j \quad (5.2)$$

となるが、Green函数 $K(x, x_1)$ の固有函数 $\varphi_p(x)$ 、固有値 λ_p とすれば、収束を条件に

$$K(x, x_1) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_p} \varphi_p(x) \varphi_p(x_1) \quad (5.3)$$

と記すことができるので、 n 分割に対して、近似的に

$$K_{ij} \approx \sum_{p=1}^n \frac{1}{\lambda_p} \varphi_p(ih) \varphi_p(jh) \quad (5.4)$$

と書くことができる。以上のことは、 n 個のベクトル

$$\mathbf{V}_p = (\varphi_p(ih)) \quad p=1, 2, 3, \dots, n \quad (5.5)$$

が(5.1), (5.2)両式の変換の固有ベクトル(近似的に)となっており、当然(5.1) (5.2)式を等置するウェイト・マトリックスも $\mathbf{V}_p$ を固有ベクトルとして持つことになる。(5.4)式が近似式であるので、上記は厳密には成立しないが、近似的に成立する性質として注目される。なおウェイト・マトリックスは、一般の連続体の解析や、動的解析など、応用範囲が広いので、さらに検討をすすめて行きたいと考えている。

(参考文献)

- 1) 佐武, 新聞, : 分布量と離散量との等価置換に關する考察, 土木学会東北支部講演概要(1970), 83-86
- 2) 佐武正雄 : はりの高精度差分式について, 土木学会論文報告集 第165号(1969), 53-58
- 3) Zienkiewicz, O.C. & Cheung, Y.K.: Finite Element Method for Analysis of Elastic Isotropic and Orthotropic Slabs, Proc. Inst. Civil Engrs. 28 (1964), 471-488
- 4) Timoshenko, S.: Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill (1959), 180-202