

電力中央研究所 正員 〇岩 穂 徹 宏
都立大学大学院 学生員 安 井 将 文

II まえがき

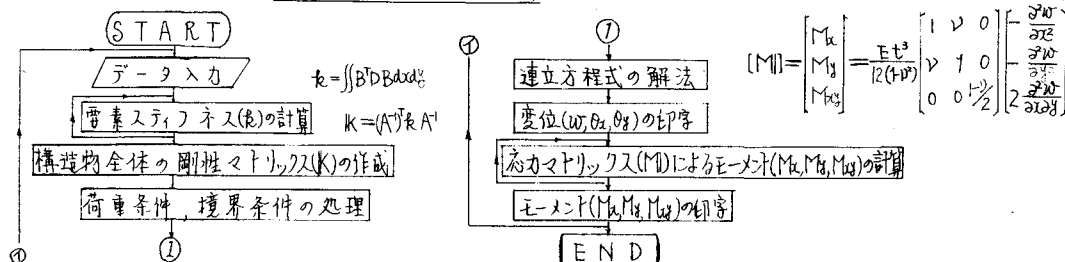
衆知のごとく、平板の曲げ問題に対する有限要素法の適用は、Clough, Morley 等多くの研究者によってなされてきたが、その大部分が要素内の変位関数を仮定したいわゆる「変位法」であるため、要素内の変形の適合条件は満足するが、内力の釣合条件は満足しない。そのため分割を細かくしても、変位 (w, θ_x, θ_y) に対して、モーメント (M_x, M_y, M_{xy}) の精度がかなり悪い。この欠点を改良するため、又保、吉田両氏は、有限要素法と差分法を組合せた独自の方法を開発している。筆者らも同様な目的から有限要素法と差分法を組合せ、2, 3 の簡単な例題について、平板の解析を試みた。

III 基本式

(1) 有限要素法(変位法)による解法

平板を任意の三角形要素に分割し、形状関数を $w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 (x^2 y + xy^2) + \alpha_9 y^3$ と仮定し、下に図式化した計算手順に従ってたわみ w , 及びモーメント M_x, M_y, M_{xy} を求める。

計算手順のフローチャート



(2) 差分法による解法

平板のたわみに関する微分方程式 $\Delta \Delta w = q/D$ を差分近似した差分方程式

$$\text{は①式であり、また特に境界が単純} \quad \frac{\Delta^4 w}{\Delta x^4} + 2 \frac{\Delta^4 w}{\Delta x^2 \Delta y^2} + \frac{\Delta^4 w}{\Delta y^4} = q/D \quad \text{----- ①}$$

$$\text{支持の場合は、①式を2つの} \quad \frac{\Delta^2 M}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2 M}{\Delta y^2} = -q, \quad \frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2 w}{\Delta y^2} = -M/D \quad \text{--- ②}$$

階の差分方程式②式に分けるこ (ここに、 $M = (M_x + M_y)/(1+\nu)$)

とができる。①式及び②式を図-1の0点について展開すると、それぞれ

$$20w_0 - 8(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + 2(w_5 + w_6 + w_7 + w_8) + w_9 + w_{11} + w_{13} + w_{15} = 8q\delta^4/D \quad \text{--- ③}$$

$$4M_0 - (M_1 + M_2 + M_3 + M_4) = -8q\delta^2, \quad 4w_0 - (w_1 + w_2 + w_3 + w_4) = -M_0\delta^2/D \quad \text{--- ④}$$

となる。モーメント (M_x, M_y, M_{xy}) は、③式④式から求められたたわみ w を用いて次式から求める。

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \approx -D \left(\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} + \nu \frac{\Delta^2 w}{\Delta y^2} \right), \quad M_y = -D \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \approx -D \left(\nu \frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2 w}{\Delta y^2} \right), \quad M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \approx -D(1-\nu) \frac{\Delta^2 w}{\Delta x \Delta y} \quad \text{⑤}$$

(但し、 D : 平板の曲げ剛性、 ν : ポアソン比)

⑤式を、点0について展開すると、④式となる。

$$M_x \approx -D \{ w_1 - 2w_0 + w_3 + \nu \{ w_2 - 2w_0 + w_4 \} \} / \delta^2, \quad M_y \approx -D \{ \nu \{ w_1 - 2w_0 + w_3 \} + w_2 - 2w_0 + w_4 \} / \delta^2, \quad M_{xy} = -D(1-\nu) \{ w_5 - w_6 + w_7 - w_8 \} / 4\delta^2 \quad \text{⑥}$$

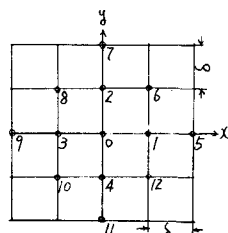


図-1

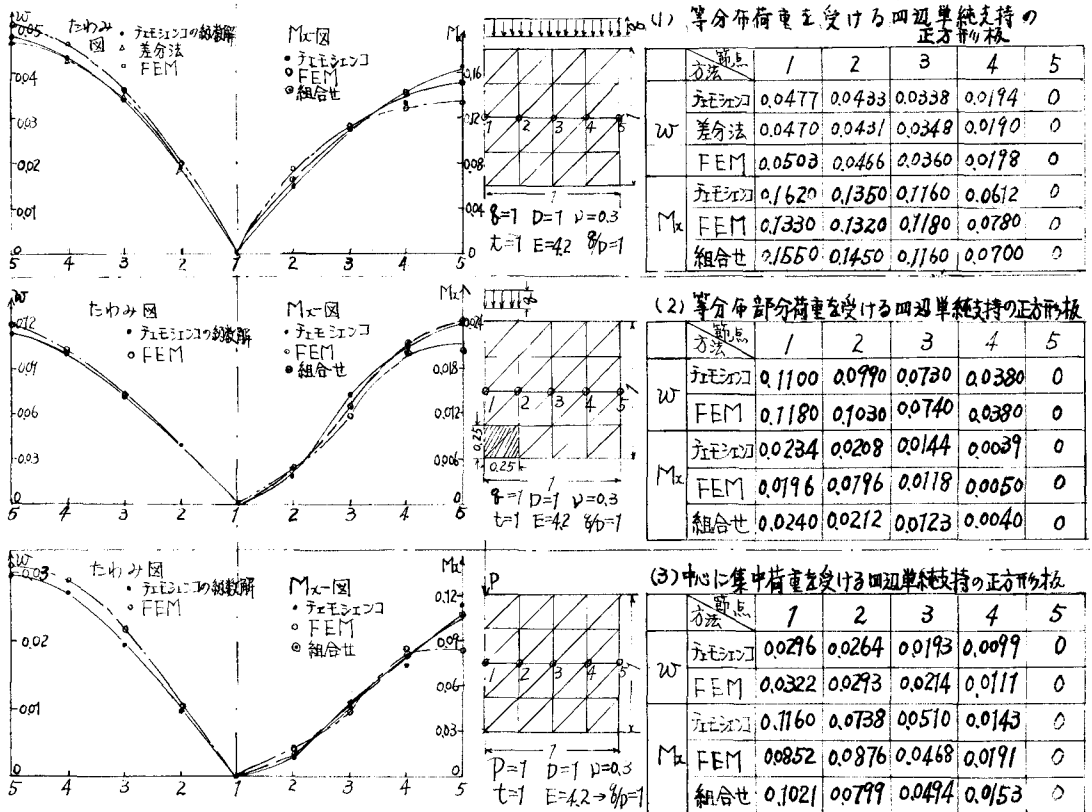
(3) 有限要素法と差分法の組合せによる解法

この方法は、(1)の有限要素法から求めたたわみを、(2)の差分法におけるモーメントの差分近似式⑤式に代入して、各点のモーメント(M_x, M_y)を求める方法である。すなわち、プログラム上は単に(1)の有限要素法のプログラムの応力マトリックスによる計算部分を、差分近似式⑤式のパラメータとおきかえるだけでよい。

[III] 計算例

次に示すように簡単な例題について、有限要素法、差分法及び両者の組合せによる方法で解析を行い、テモシェンコの厳密解と比較してみた。

(1) 等分布荷重を受ける四辺単純支持の正方形板 (2) 等分布部分荷重を受ける四辺単純支持の正方形板 (3) 中心に集中荷重を受ける四辺単純支持の正方形板 (尚、対称性を考慮して全体の1/4を解析した)



[IV] 結言 以上の計算結果から、(3)の組合せによる方法で求めたモーメントは、(1)の有限要素法の応力マトリックスによって求めたそれよりも良い結果を示している。そして同様な傾向が他の1,2の例題についても認められている。しかもこの方法によれば(1)の有限要素法のプログラムの一部を差分近似式とおきかえるだけにすぎず、方法も簡単であるから、有限要素法によるたわみ計算に十分信頼できるならば、モーメントの精度を高める修正法として使用できると考えられる。