

名古屋大学 学生員 ○梶田建夫

名古屋大学 正 員 成岡昌夫

等方性長方形板の弾塑性解析は、数値計算法の発達とともに、多くの研究がなされてきた。Massonnet や, Yokoo, Nakamura and Mori は階差法を用いて, Arg and Lopez は discrete model を用いて, Marcal, Armer, McNeice らは有限要素法を用いて解析をおこなっている。長方形板については、種々の研究がなされているが、平行四辺形板や、三角形板などの形状の板については、降伏線理論のような極限解析では取り扱われているが、塑性域を考慮した弾塑性解析はあまりおこなわれていないようである。有限要素法が、このような形状の板の弾塑性解析に有効に用いられることは明らかであるが、これに用いられる三角形板曲げ要素で、精度が高く、応力分布を正しく表す剛性行列が得られないため、今まであまり用いられなかった。最近 Bell や Cowper, Kosko, Lindberg and Olson らにより誘導された、CCT-18 要素は、今までの三角形要素に較べ精度が高く、各節点で曲げモーメント、ねじりモーメントが連続となるという特徴を持っている。ここでは、この CCT-18 要素を用いた板の弾塑性解析について、simple plastic theory にそった解析法と、板厚方向の塑性域を考慮した解析法について示す。

1. CCT-18 要素について

この要素の剛性行列は、要素内の変位に五次の完全多項式を用いた CCT-21 要素より得られる。

$$w = \{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}, \alpha_{15}, \alpha_{16}, \alpha_{17}, \alpha_{18} \}^T$$

$\{\alpha\}$ は 21 の項数をもつが、これは、各節点での未知数として、たわみ、たわみ角、曲率、ねじり率を取り、各辺の中点で normal slope を取ることによって表わされる。CCT-18 要素は、この剛性行列より、辺の中点での normal slope が辺にそって、3 次式で変

CLAMPED SQUARE PLATE UNDER UNIFORM LOAD q						
	Center Deflection w $10^3 \times wD/q1^4$			Center Moment M_x $10^4 \times M_x/q1^2$		
Mesh	T-9	LCCT-12	CCT-18	T-9	LCCT-12	CCT-18
1x1	87	31	115	271	97	226
2x2	127	111	126	316	183	229
3x3	131	122	127	327	209	229
4x4	130	125	127	326	226	229
Exact	126			231		

T-9 : Zienkiewicz (non-conform)

LCCT-12 : Fellipa

Exact : Timoshenko

化すると仮定して、これを消したものである。この要素の精度を、他の要素とともに表に示す。

2. Simple Plastic Theory にそった解析法

これは、はり、フレームの弾塑性解析でおこなわれる塑性ヒンジの考えを、板の弾塑性解析に拡張したものである。降伏条件は、主曲げモーメントが一定値 $\pm M$ 、 $-M$ に達した場合に降伏するという条件を用いる。ある荷重段階 P において、しほの節点に不連続回転角が生じていて、 $i+1$ 番目の降伏させた節点を求める場合、つぎの式が成立する。

$$P^i \{F\} = [K] \{r\} + [R^i] \{\theta^i\}$$

荷重による荷重ベクトル、 $[K]$ は剛性行列、 $\{r\}$ は未知変位ベクトル、 $[R^i]$ は行

転角 $\{\theta^i\} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$ に対応する列を用いた行列である。これを解くと、

$$[R - [K]^{-1}[R^i]] \{\theta^i\} = [G] \{f\}$$

となる。ここで、 $\{G\} = [K]^{-1}\{F\} - [K]^{-1}\{R\}$ 、 $\{\delta^i\} = \{p^i, \beta, \beta, \dots, \beta\}$ である。この行列 $[G]$ を用いて、各節点の主曲げモーメントを計算し、つぎのようにあらわす。

$$\{M^i\} = [A]\{\delta^i\}$$

ここで、 $\{M^i\} = \{M_1, M_2, \dots, M_n, M'_1, M'_2, \dots, M'_n\}$ 、 $M_1, M_2, \dots, M_n$ はすでに降伏条件を満足した節点の値で、 $+M$ または $-M$ に等しく、 $M'_1, M'_2, \dots, M'_n$ は降伏条件を満足していない節点の主曲げモーメントで、これも $+M$ または $-M$ とおき、これを解くと $\{\delta^j\}$ が得られる。 j を変化させ、 p の最小値を求めると、これが $i+1$ 番目の節点が降伏条件を満足する荷重であり、 $\{\delta^j\}$ を用いてその荷重段階での変位、曲げモーメントが得られる。つぎに、新しく回転角の不連続となった節点の主曲げモーメントの方向より $\{R\}$ を修正する。ここで、 x, y 軸方向の不連続回転角を $\beta \cos \theta, \beta \sin \theta$ のようにとる。以上を不連続点が境界まで達して、構造物が極限状態となるまで繰り返す。

3. 塑性域の広がり を考慮した解析法

一般に、有限要素法に用いられる弾塑性解析には、tangential stiffness methodとinitial strain method, initial stress method といわれるものがある。いずれも漸増法であるが、前者は各荷重段階ごとに全体の剛性行列を変化させるが、後者はいずれも、解析途中で大変形を考慮しないが、全体の剛性行列を変化させることはない。ここでは、塑性ひずみの板厚内の变化を仮定し、これを初期ひずみとして取り扱ったinitial strain methodによる板の弾塑性解析を示す。図のような三角形要素の斜線の部分が塑性域であるとし、弾塑性境界、塑性ひずみ部分をつぎのように仮定する。 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) は面座標

$$T(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = t_1 \xi_1 + t_2 \xi_2 + t_3 \xi_3$$

$$\varepsilon^p(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{\xi - T}{\xi_0 - T} (\varepsilon_1^p \xi_1 + \varepsilon_2^p \xi_2 + \varepsilon_3^p \xi_3)$$

ここで、 $\varepsilon_1^p, \varepsilon_2^p, \varepsilon_3^p$ は板表面での塑性ひずみの値である。この塑性ひずみを初期ひずみとし、これと等価な節点外力はつぎの式より得られる。

$$\{N\} = - \int_A \left(\frac{\xi - T}{\xi_0 - T} \right) x [B] [D] [F] dx dA \{x^p\} = [F] \{x^p\}$$

ここで、 $[B]$ は要素内のひずみと、節点変位との関係

を表わすもので、 $[D]$ は応力とひずみの関係を表わすものである。また、 $[F]$ は塑性ひずみの仮定より生ずる行列であり、 $\{x^p\} = \{\varepsilon_1^p, \varepsilon_2^p, \varepsilon_3^p, \dots, \varepsilon_{2j}^p\}$ である。initial strain methodによる計算過程は、つぎのようである。ある荷重段階 $\{p_i\}$ において、微小な荷重増分 $\{P_{di}\}$ を与える。まず、応力増分 $\{G_{ij}\}$ を仮定し、これより塑性ひずみ増分をつぎの式 $\{\varepsilon_{ij}^p\} = [C] \{G_{ij}\}$ より計算する。この荷重状態で、降伏条件の判定、および、塑性域の深さを計算し、等価節点外力の式 $\{N_{ij}\} = [E] \{\varepsilon_{ij}^p\}$ より節点外力の増分を

$$\{N_{ij+1}\} = [K]^{-1} \{P_{di}\} - [K]^{-1} \{N_{ij}\}$$

計算する。この変位 $\{x_{ij+1}\}$ より、全ひずみ増分 $\{\varepsilon_{ij+1}^p\}$ が得られるので、これより弾性ひずみの増分 $\{\varepsilon_{ij+1}^e\}$ を計算し、新しく応力増分 $\{G_{ij+1}\}$ が得られる。前の応力増分より得られた塑性ひずみ増分 $\{\varepsilon_{ij}^p\}$ と、新しい応力増分より得られる塑性ひずみ増分 $\{\varepsilon_{ij+1}^p\}$ が近い値となるまで計算が繰り返される。ここでは荷重段階を j は各荷重段階での反復回数を示す。

計算例は当日発表の予定である。

