

早稲田大学理工学部 正員 堀井健一郎

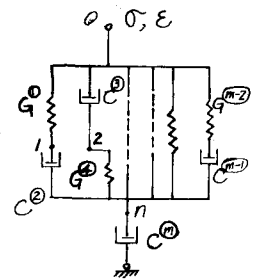
早稲田大学大学院 学生員 〇川原睦人

早稲田大学大学院 学生員 内藤 泰

1 緒言

有限要素法の特徴は、任意の境界条件を比較的簡単に処理し得ることと同時に、材料の非弾性的性質をも実用上十分な範囲で扱うことができることにある。粘弾性体の有限要素法による解析に関する研究は、便宜的に三種類に分けることができる。すなわち、粘弾性歪を見かけ上の初期歪とみなし、等価な節点力に換算して計算を進める等価荷重法、弾性体の弾性係数と粘弾性体の粘弾性係数との対応を有効に利用した等価弾性係数法、さらに粘弾性体の応力歪方程式を積分表示しておき、これより積分方程式を導く方法などである。ここでは、レオロジーモデルによる応力歪方程式が一階の連立微分方程式によって与えられることに着目して有限要素法を適用する方法をとる。著者らは、さきに、この方法によって粘弾性解析が可能であることを指適した。^{1,2)} 粘弾性的性質を示す材料の中には、応力と歪あるいは応力と歪速度との関係が非線型な関係によって与えられることが多く、このような場合に対しても解析の必要性が大きいことがある。この解法によれば、時間間隔のとり方に注意すれば、実用上十分な解析を行うことができることを述べる。

Fig-1



2 レオロジーモデルによる応力歪方程式

Fig. 1 のごとく、有限個のバネ要素(G^0)及びダッシュポット要素(C^0)よりなるレオロジーモデルを考える。端より始まって、任意に各レオロジー要素の接合点に番号をつける($0 \sim n$)。各レオロジー要素にも同様に任意に番号をつける($0 \sim m$)。次に、以下に示す行列をそれぞれ定義する。

$[A_G]$: 第①レオロジー要素がバネ要素であるとき、その行列の第 i 要素をバネ要素の弾性係数 G^0 とし、他は0とした $m \times m$ の行列。

$[A_C]$: 第①レオロジー要素がダッシュポット要素であるときその行列の第 i 要素をダッシュポット要素の粘性係数 C^0 として他は0とした $m \times m$ の行列。

レオロジー要素の結合状態を示す次の行列を定義する。

$[K_G]$: 第①レオロジー要素がバネ要素であり、第 j 接合点、第 i 接合点に結合しているとき、その行列の第 j 要素が1、第 i 要素が-1となる $(n+1) \times m$ の行列。

$[K_C]$: 第②レオロジー要素がダッシュポット要素であり、第 j 接合点、第 i 接合点に結合しているとき、その行列の第 j 要素が1、第 i 要素が-1となる $(n+1) \times m$ の行列。

ここで、単軸応力状態の場合を考えるとこのレオロジーモデルによって与えられる応力歪関係は

$$\{\dot{\sigma}\} = [K_G][A_G][K_G]^T \cdot \{\epsilon\} + [K_C][A_C][K_C]^T \cdot \{\dot{\epsilon}\} \quad \text{----- (1)}$$

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma, 0, 0, \dots, 0\} \quad \{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon, h_1, h_2, \dots, h_n\}$$

(1)式で与えられる。ここに、応力を σ 、歪を ε とし、 $h_1, h_2, \dots, h_n$ はレオロジーモデルの各結合点に対応した歪である。

三軸応力状態においては、等方性の仮定から、応力、歪はそれぞれ、体積成分、偏差成分に分けられるものとし、独立に(1)式で表わされる関係が、それぞれ成立するとする。

電子計算機を対象とした数値解法では、次の点で(1)式を用いる方が適していることがわかる。

- 1) レオロジーモデルとの対応が明確であること。
- 2) A_G, A_c, K_G, K_c などの行列により、機械的に作成することができること。
- 3) 高階の微分方程式を数値解析上直接扱うことは困難が多く、一般に一階の微分方程式に変換してから行うのが常である。(1)式はそのまま一階の微分方程式であること。
- 4) 応力に関する微分を含まず、右辺に応力の項を含んでいない為、式の変形が容易であること。よって未知数が増加するにもかかわらず(1)式を用いることにする。

解析を行おうとする全時間を細かく分割し、分割した時間の一つを Δt と表わす。この時間区間は一定である必要はないが一定にとっておくと、数値計算上有利である。この微小時間区間 Δt 内においては歪速度が一定であると仮定すると、次の(2)式を得る。

$$\left[\frac{\dot{\varepsilon}}{h} \right] = \frac{1}{\Delta t} \left(\left[\frac{\varepsilon}{h} \right] - \left[\frac{\varepsilon(0)}{h(0)} \right] \right) \quad \text{----- (2)}$$

ここに、 $\{\varepsilon(0) \ h(0)\}^T$ は Δt 時間区間における初期値であり一つ前の時間区間で計算された $\{\varepsilon \ h\}^T$ を用いるものとする。(1)式を次のように簡単に表わしておく。

$$\begin{bmatrix} \sigma \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{(1)} & A^{(2)} \\ A^{(3)} & A^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B^{(1)} & B^{(2)} \\ B^{(2)T} & B^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon} \\ \dot{h} \end{bmatrix} \quad \text{----- (3)}$$

(2)式を(3)式に代入してそれぞれ $\{\sigma\}$ 、 $\{h\}$ を求めると次のようになる。

$$\{h\} = [S] \cdot \{\varepsilon\} - \{h_0\} \quad \text{----- (4)}$$

$$[S] = -[K^{(3)}]^{-1} [K^{(2)T}] \quad , \quad \{h_0\} = [K^{(3)}]^{-1} \cdot [H^{(2)T} | H^{(3)}] \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon(0) \\ h(0) \end{bmatrix}$$

$$\{\sigma\} = [D] \cdot \{\varepsilon\} - \{\sigma_0\} \quad \text{----- (5)}$$

$$[D] = [K^{(1)}] - [K^{(2)}] \quad [S] = [K^{(1)}] - [K^{(2)}] \cdot [K^{(3)}]^{-1} \cdot [K^{(2)T}]$$

$$\{\sigma_0\} = -[H^{(1)} | H^{(2)}] \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon(0) \\ h(0) \end{bmatrix} - [K^{(2)}] \{h_0\}$$

$$[K^{(1)}] = [A^{(1)}] + \frac{1}{\Delta t} [B^{(1)}] \quad , \quad [K^{(2)}] = [A^{(2)}] + \frac{1}{\Delta t} [B^{(2)}] \quad , \quad [K^{(3)}] = [A^{(3)}] + \frac{1}{\Delta t} [B^{(2)}]$$

$$[H^{(1)}] = \frac{1}{\Delta t} [B^{(1)}] \quad , \quad [H^{(2)}] = \frac{1}{\Delta t} [B^{(2)}] \quad , \quad [H^{(3)}] = \frac{1}{\Delta t} [B^{(3)}]$$

(5)式は見かけ上の初期応力 $\{\sigma_0\}$ をもち、応力歪行列を $[D]$ とする弾性体の応力歪関係と相似の関係にあることがわかる。すなわち、(5)式により、粘弾性体の構成方程式が、弾性体と相似の関係で表わされたことになる。行列 $[D]$ は、弾性体の場合には弾性係数により構成されるものであるが、(5)式では、粘弾性係数および時間区間 Δt により構成されている。これは変形係数行列と呼ばれるものに対応している。

3 有限要素法の適用

三軸応力状態の場合には、体積成分、偏差成分それぞれについて、(5)式が成立し、これらをかき合わせたものはまた(5)式のように表わすことができる。よって、応力歪方程式は三軸応力状態も含めて(5)式により与えられるとする。

よく知られるように解析しようとする構造を有限の大きさを持つ構造要素に分割する。分割された要素の各節点における変位を $\{v\}$ とし、これを用いて要素内の変位 $\{u\}$ を

$$\{u\} = [A] \{v\} \quad \text{----- (6)}$$

のごとくに仮定する。要素内の歪 $\{E\}$ は(6)式を用いることによって

$$\{E\} = [B] \{v\} \quad \text{----- (7)}$$

のごとくになる。仮想仕事の定理の教えるところにより

$$\int_V \delta \{E\}^T \{C\} dV = \int_V \delta \{u\}^T \{f\} dV + \int_S \delta \{u\}^T \{P\} dS \quad \text{----- (8)}$$

ここに $\{f\}$ は物体力を $\{P\}$ は境界に作用する力を表わす。積分は V , S の区別によりそれぞれ、体積、境界について行うものとする。(5), (6), (7), (8)式より、次のように解式を得る。

$$[K] \{v\} = \{F\} - \{F_0\} \quad \text{----- (9)}$$

$$[K] = \left[\int_V [B]^T [D] [B] dV \right]$$

$$\{F\} = \int_V [A]^T \{f\} dV + \int_S [A]^T \{P\} dS, \quad \{F_0\} = \int_V [B]^T \{C_0\} dV$$

(9)式は、要素ごとに、各時間間隔について成立する。これより構造全体についての解式を作成し時間間隔ごとに繰り返して計算を進めればよい。

4 数値計算例

数値計算例としてFig. 2に示されるような外側が弾性体で囲まれた粘弾性体に荷重が作用した場合を挙げる。このとき材料の応力歪関係は、クリープ歪 ϵ_{ij}^c が偏差応力 σ_{ij}' によって

$$\dot{\epsilon}_{ij}^c = K \cdot \sigma_{ij}' \quad K = \frac{A \sinh(B\bar{\sigma})}{\bar{\sigma}} \quad \text{----- (10)}$$

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + \tau_{xy}^2}, \quad A, B \text{ は定数}$$

(10)式によって与えられるとしている。Fig. 3には応力の時間的推移が、Fig. 4, Fig. 5には応力の分布が示されている。Fig. 6, Fig. 7の計算例は片持梁の先端に持続する荷重が載荷された場合の計算結果である。応力歪関係はBailey-Horton法則により、

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{1}{s} \left(\frac{\sigma}{\sigma_s} \right)^n \quad \text{----- (11)}$$

と与えられるとしている。Fig. 6は応力の時間推移を、Fig. 7は断面内の応力分布を示している。

1) 堀井健一郎・川原睦人：“有限要素法による粘弾性体の解析”，第6回岩盤力学シンポジウム，1970

2) 堀井健一郎・川原睦人：“有限要素法による粘弾性体の解析”，土木学会論文報告集 No. 179, 1970

Fig. 2
有限要素の分割

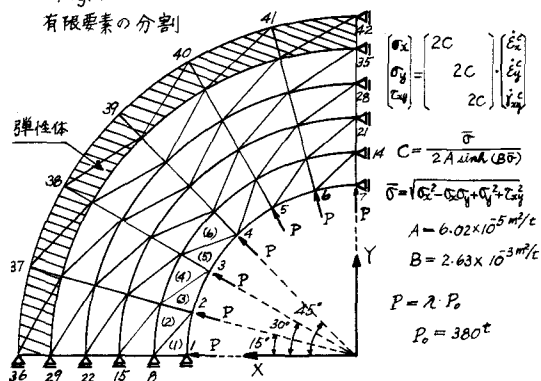


Fig. 4 応力分布

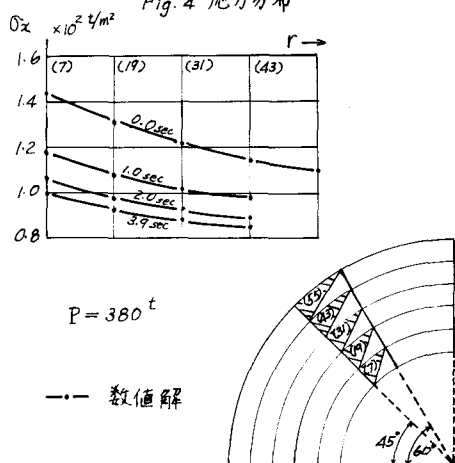


Fig. 6 片持梁のクリープ

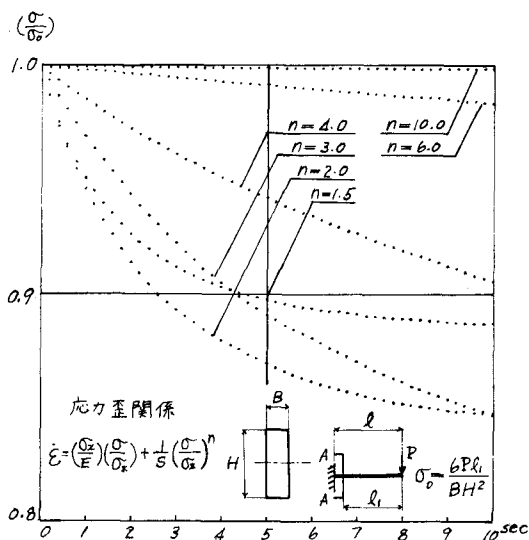


Fig. 3 応力時間推移

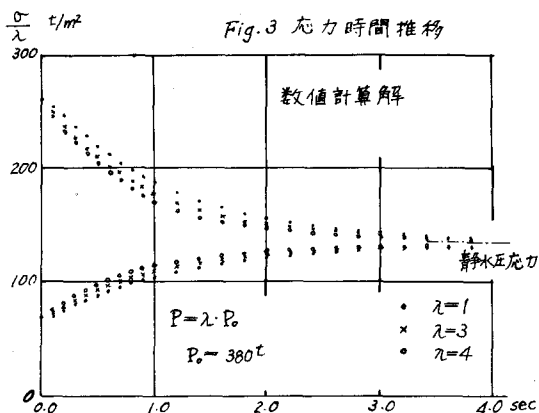


Fig. 5 応力分布

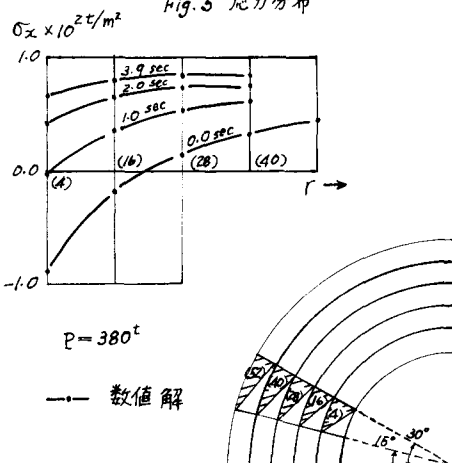


Fig. 7 断面内の応力分布

