

名古屋大学 学生員 ○宮池克人

名古屋大学 学生員 梶田謙夫

名古屋大学 正員 川本勝万

1. まえがき

連続体力学の分野における非線形問題の一解法である増分理論を有限要素法に適用する試みは、すでに多くの文献に示されている。本稿は、この増分理論に基づく、O.C. Zienkiewicz らにより提案された「initial stress process」を、三角形三節点要素モデルおよび三角形六節点要素モデルに適用し、その結果について比較検討する。なお、この「initial stress process」は、他の incremental elasticity process などと比較して、解析過程における収束特性のよいこと、および反復計算においては荷重項のみが変化し、Stiffness Matrix は不変であるので反復計算するごとに Stiffness Matrix をつくりかえる必要のないことが、大きな特徴となっている。

2. initial stress process の概要

initial stress process を弾塑性問題に適用した場合について次に説明する。

a) 弾塑性 Matrix $[D]_{ep}^*$ の作成

塑性状態にある材料の応力増分およびひずみ増分を関係づける弾塑性 Matrix $[D]_{ep}^*$ は、次のようにして導かれる。

材料の降伏条件式 $F(\{\sigma\}, K) = 0$ (K : ひずみ硬化のパラメータ) より、塑性ひずみ増分は、 $\delta\{\varepsilon\}_p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}}$ で与えられる。ここに入は定数である。いま、応力増分に対し、降伏条件式を満足する応力状態にある要素のひずみ増分 $\delta\{\varepsilon\}$ を、弾性ひずみ増分 $\delta\{\varepsilon\}_e$ および塑性ひずみ増分 $\delta\{\varepsilon\}_p$ の各部分に分割できるものとするれば次式が得られる。

$$\delta\{\varepsilon\} = \delta\{\varepsilon\}_e + \delta\{\varepsilon\}_p \quad (1)$$

弾性ひずみ増分に対しては、 $\delta\{\varepsilon\}_e = [D]^{-1} \delta\{\sigma\}$ で与えられるから、(1)式は結局次のようになる。

$$\delta\{\varepsilon\} = [D]^{-1} \delta\{\sigma\} + \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \cdot \lambda \quad (2)$$

さらに塑性状態における応力は降伏面上に存在するから降伏条件式を増分形であらわすと、

$$0 = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T \delta\{\sigma\} + A \lambda, \quad A = \frac{\partial F}{\partial K} \frac{dK}{d\lambda} \quad (3)$$

(2), (3) 式より λ を消去して、弾塑性 Matrix $[D]_{ep}^*$ は次のようにあらわされる。

$$\delta\{\sigma\} = [D]_{ep}^* \delta\{\varepsilon\} \quad (4)$$

$$[D]_{ep}^* = [D] - [D] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T [D] \left[A + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\}^T [D] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right\} \right]^{-1} \quad (5)$$

ここでパラメータ A は、ひずみ硬化の生じない場合には 0 であるが、ひずみ硬化の生ずる場合は塑性仕事の考え方より次のように与えられる。

$$A = \frac{\partial F}{\partial K} \{\sigma\}^T \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \quad (6)$$

したがって F と K の関係が得られていれば、 A は決定することが出来る。

c) 計算の process

i) 荷重増分を与え、弾性応力増分 $\{\Delta\sigma'\}_i$ およびひずみ増分 $\{\Delta\varepsilon'\}_i$ を計算する。

ii) 荷重増分を与える前の段階で得られた応力 $\{\sigma_0\}$ あるいは store されている実応力 $\{\sigma\}$ に $\{\Delta\sigma'\}_i$ を加え $\{\sigma'\}$ とする。 $F(\sigma') < 0$ なのかを判定し、もし満足しておればこの要素は弾性状態であると判定し、以下の Step はとびこえる。

iii) $F(\sigma') \geq 0$ ならば $\{\Delta\sigma\}_i$ を式(4)を用いて

$$\{\Delta\sigma\}_i = [D]_{ep}^* \{\Delta\varepsilon'\}_i$$

のように計算する。ここで $[D]_{ep}^*$ は応力 $\{\sigma'\}$ により計算される。次に body force として取り扱うべき応力 $\{\Delta\sigma''\}$ を次式より求める。

$$\{\Delta\sigma''\}_i = \{\Delta\sigma'\}_i - \{\Delta\sigma\}_i$$

また store されるべき実応力および実ひずみ $\{\sigma\}, \{\varepsilon\}$ を次のように求める。

$$\{\sigma\} = \{\sigma'\} - \{\Delta\sigma''\}_i$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon'\} + \{\Delta\varepsilon'\}_i$$

iv) body force として取り扱うべき応力 $\{\Delta\sigma''\}_i$ に相当する等価節点力 $\{P\}_i^e$ を次式より計算する。

$$\{P\}_i^e = \int [B]^T \{\Delta\sigma''\}_i d(vol)$$

v) iv) で得た等価節点力 $\{P\}_i^e$ を外力として弾性計算を行い $\{\Delta\sigma'\}_2$ および $\{\Delta\varepsilon'\}_2$ を求める。

vi) 以下 Step ii) ~ v) までは、等価節点力が十分小さくなるまで繰り返し計算し、この荷重段階における計算が完了したら、次の荷重段階へ移る。このようにして、各荷重段階における塑性域を追跡し、反復計算により解を得てゆくことができる。

このような initial stress process は、弾塑性問題のほか、クリープ問題などにも適用でき、また no tension method もこの process の一種と考えられる。

3. 三角形三節点および六節点要素モデルによる弾塑性解析

三角形三節点要素モデル (C.S.T) および三角形六節点要素モデル (L.S.T) は、今日最も普及しているモデルであるので、ここではこの2つのモデルを二次元平面向題に適用し、結果を比較検討する。

L.S.T モデルは、要素内で応力およびひずみが線型に変化するところが、C.S.T モデルに対する有利な点とされているが、initial stress process による弾塑性解析においては、この特性が要素内で隣接条件を満足する領域とそうでない領域を生ぜしめる結果となり、このような要素を塑性あるいは弾性として一意的に取り扱うことはできない。したがって、本稿では図-1に示すように一要素を4つの sub element に分割し、L.S.T モデルにより得られた結果を次のように処理し計算を進めた。すなわち、1) 頂点節点 i, j, k の応力は、それぞれ、その囲まれるすべての L.S.T 要素の節点応力の平均値とする。2) 辺上節点 l, m, n の応力は、それぞれ $i-j, j-k, k-i$ の節点応力の平均値とする。3) 各 sub element の応力は、それを囲む三節点の応力の平均値とする。以上のようにして、各 sub element は C.S.T モデルと同様の、要素内で応力およびひずみが一定である特性をもつ要素とされ、各 sub element について62節に示したプロ

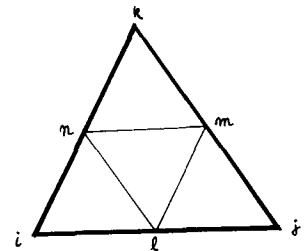


図-1

セスにより、降伏した Suc element に対し等価節点力が計算され、この等価節点力は L.S.T モデルによる弾性計算における外力として与えられ、計算が進められる。図-2 は、C.S.T および L.S.T モデルによる弾塑性解析のフローチャートを示す。

計算例として、図-3 に示す矩形断面の片持ばりを用いる。図に示す要素分割は L.S.T 要素モデルを用いたもので、C.S.T 要素モデルによる分割は、この分割をさらに図-1 と同様に分割したものをを用いている。材料の降伏条件式としては、von Mises の式を用い、荷重増分は弾性論による弾性限荷重 P_{cr} の 20% とし、計算を開始する荷重増分を P_{cr} とした。

図-4 は P_{cr} に対する荷重増分の比と荷重作用点の鉛直変位との関係を示す。この図から、C.S.T モデルによる結果は、変位、応力ともに弾性論による値より小さく出ており、したがって塑性域の生ずる荷重増分は $P/P_{cr} = 1.2$ を超えてからといった結果となっている。これは、一般に要素分割が粗いと、L.S.T モデルによる結果が真の値より小さく得られる特性によるもので、さらに自由境界面に最大応力の生ずるような系に適用した場合の応力値については、その傾向が著しいことによるものである。このことから C.S.T モデルを用いて解析を進めるにあたっては、要素分割の妥当性、および計算結果の取り扱いについて注意を払うことが必要である。これに対し同じ節点数を有する L.S.T モデルによる結果は、変位、応力ともに弾性論と比較的よく一致し、 P/P_{cr} が 1.0 を過ぎると塑性域を生じている。なお、図中 Collapse とあるのは、 $P/P_{cr} = 1.4$ における、等価節点力による反復計算が収束せず、このほうが破壊したものと判定したことを示す。このような場合、等価節点力は反復を繰り返しても小さくはならず、むしろ反復ごとに大きくなる傾向にある。L.S.T モデルによる断面 A-A' における x 軸方向の応力値 σ_x を図-5 に示す。これによれば、Suc element 内で

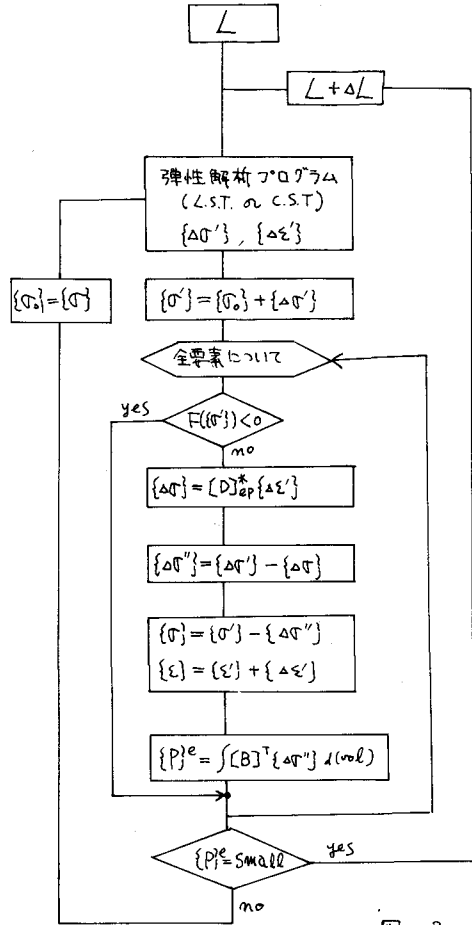


図-2

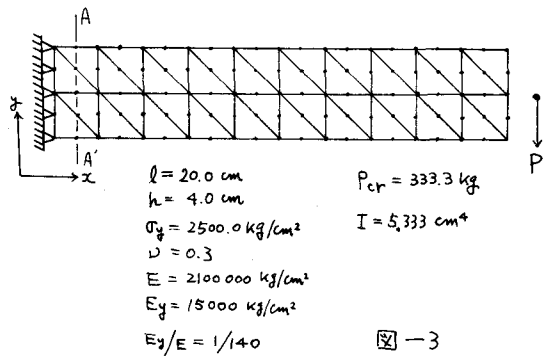


図-3

応力値一定とする取り扱いによる結果は、直接得られる節点応力値をよくおさえており、このような取り扱いが妥当であることを示している。また弾塑性解析の結果は、はりの塑性理論から得られる応力分布のパターンと似かよっている。等価節点力による反復計算の収束状況を図-6に示す。これによれば、はじめの2,3回の反復で急速に収束し、計算時間の関係から反復を多く重ねなくても比較的良好な結果が得られることが予想される。

なお、要素分割を増加した場合、その他各種計算例は、当日発表することにし、ここでは省略する。本稿では、非線型解析における弾塑性問題の一例を示すに限ったが、このほか *Motension Method*, あるいは *Creep* 問題等についても、*initial stress process* の手法による解析を現在進めているので、何らかの形で近々発表する予定である。

参考文献 O. C. ZIENKIEWICZ, S. VALLIAPPAN, and I. P. KING ELAST-PLASTIC SOLUTION OF ENGINEERING PROBLEMS 'INITIAL STRESS', FINITE ELEMENT APPROACH *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, Vol. 1 75~100 (1969)

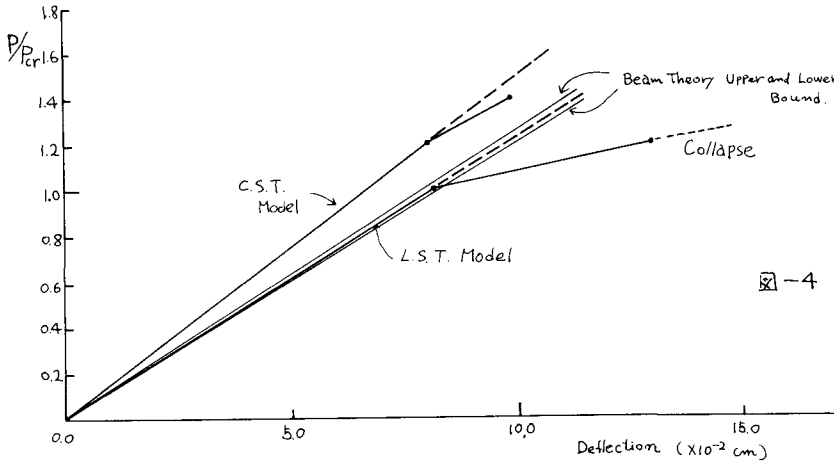


図-4

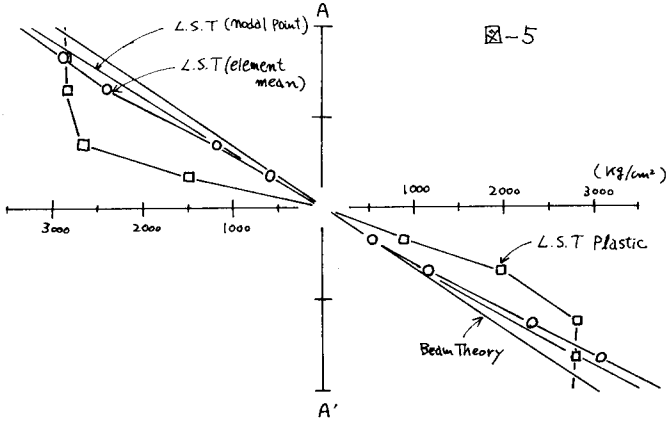


図-5

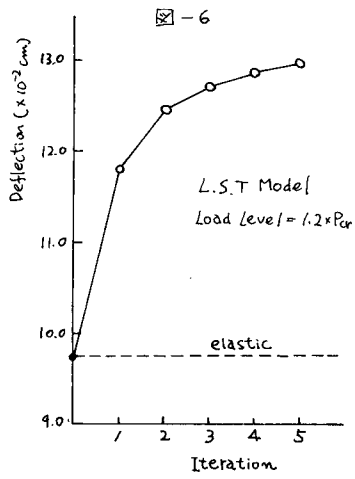


図-6