

§ 1 まえがき 有限要素法による構造解析は多元連立方程式を解くことに帰着する。この多元連立方程式を小型電子計算機でも精度良く、短時間で処理することが必要で、本報告では有効であると思われる一つの解法について述べる。また、平面曲げ問題に関して四角形要素については変位および曲げモーメントは共に設計上十分な精度で求められるが(Clough[5])、自由度9の三角形要素についてはある一つの変位モデルでは良い結果が得られない。そこで、剛性マトリックスと応力マトリックスに別々の変位モデルを使用することにより比較的良い結果が得られたので報告する。

§ 2 多元連立方程式の解法 構造物の剛性方程式は次のように表わされる。

$$Kw = P \quad \text{あるいは} \quad \begin{Bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \bar{w}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} \quad \text{または} \quad K_{11} w_1 = \bar{P}_1 - K_{12} \bar{w}_2 \quad (1)$$

ここに、 K ：剛性マトリックス； W ：節点変位ベクトル； P ：荷重ベクトル；

w_1, P_2 ：未知ベクトル； $\bar{w}_2, \bar{P}_1$ ：既知ベクトルである。

式(1)の K_{ij} は正値対称行列であるので、この性質を利用した直接解法を以下に述べる。

1) 索引付消去法 剛性マトリックスが大きくなればなる

ほど、零要素の占める割合は多くなり、剛性マトリックスはまばらなものとなる。隣り合う節点と節点番号の差が小さく、また順序正しく番号付ければBand Matrix法あるいは三連行列として処理する方法がある。しかし、極端な例として図-1

(a)に示すような構造(簡単のため1節点/自由度とする)の

場合には剛性マトリックスは図-1(b)のようになり上記方法

は得策ではない。そこで、非零要素に索引を付けて、その要素を参照し処理する消去法を用いる。

消去法では反復法と異つて、最初零であつた要素が零でなくなる要素も出てくるが、すべての零要素が零でなくなるわけではなく、消去(分解)した結果もまた零の多い行列となつている。図-1(b)の例では図中○印の要素が零でなくなる。またこの例では、Band Matrix法では $N(N+1)/2$ のコア記憶が必要であるが、索引付消去法では処理す行の要素4個とその行より下に影響を及ぼす値(以下この値のことを寄与という)6個のみでよく、コア記憶を節約できる。その上、索引付消去法では零要素の演算を全然行なわないので計算時間を短縮できる。

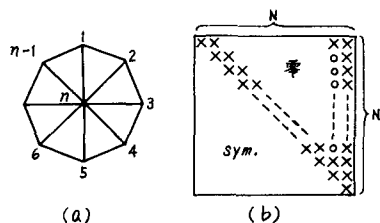


図-1

2) 処理手順

①全体の剛性マトリックスは行処理方式で処理するために、上三角部分の非零要素の値とその行の列番号を憶えた索引を行ごとに補助記憶上に作成しておく。

②ステップ①で作成された剛性マトリックスを分解するわけであるが、この分解法としては次の2通りの方法があり、後の計算例で精度の比較を行つている。

a. 平方根法 式(1)の K_{ij} は互いに転置の関係にある上三角マトリックス u と下三角マトリ

ックス u^T の積に分解される。

$$K_{ii} = u^T u \quad \text{ここに} \quad u = \begin{bmatrix} u_{i1} & u_{i2} & u_{i3} & \cdots & u_{in} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \quad \left. \begin{aligned} u_{ii} &= \sqrt{k_{ii} - \sum_{p=1}^{i-1} u_{pi}^2} \quad (1 \leq i=j) \\ u_{ij} &= \frac{k_{ij} - \sum_{p=1}^{i-1} u_{pi} u_{pj}}{u_{ii}} \quad (1 \leq i < j) \\ u_{ij} &= 0 \quad (i > j) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

6. LR 法 LR 法も下三角マトリックス L と上三角マトリックス R の積に分解される。

$$\begin{aligned} K_{ii} &= LR \\ \text{あるいは} \quad K_{ii} &= R^T D^{-1} R \quad \text{ここに} \quad \left. \begin{aligned} r_{ij} &= k_{ij} - \sum_{p=1}^{i-1} \frac{r_{pi} r_{pj}}{r_{pp}} \quad (1 \leq i \leq j) \\ r_{ij} &= 0 \quad (i > j) \\ D &\text{は対角行列で } R \text{ の対角要素に等しい。} \end{aligned} \right\} \quad (3) \end{aligned}$$

上記の方法により、分解を行いその分解した行より下の行に対する寄与を計算する。具体的に述べると、 i 行を補助記憶からコア内に読み込み、コア内に残されている $i-1$ 行までの寄与の索引と i 行の索引との突合せを行いながら i 行の分解を行う。この場合 $i-1$ 行までの寄与の列番号が i 行の索引の中になければ、 i 行のその列に新しく非零要素が生れる。 i 行の分解が終れば、 i 行より下の行に対する寄与を計算し、その寄与は $i-1$ 行までの寄与に累加し、下の行の分解の時に参照する。 i 行を補助記憶に移し次の行の処理に移る。この分解作業を最後の行まで行う。

③ 分解法として LR 法を用いれば、式(1) および式(3)より剛性方程式は次のようになる。

$$R^T D^{-1} R w_1 = \bar{P}_1 - K_{12} \bar{w}_2 \quad \text{あるいは} \quad y = D^{-1} R w_1 \quad (4-a)$$

$$R^T y = \bar{P}_1 - K_{12} \bar{w}_2 \quad (4-b)$$

式(4-b)で先に y を求め、その後式(4-a)で w_1 を求める。この場合、式(4-b)の y は R^T が下三角マトリックスであるので前進代入法により、また式(4-a)の w_1 は R が上三角マトリックスであるので後進代入法により求まる。

3) 計算例 図-2(a) に示す一様な引張を受ける平板を三角形要素を用いて、平方根法および LR 法で解いた場合の精度の比較、また Band Matrix 法と索引付消去法による計算時間の比較を行った。

この場合の計算時間は変位のみの計算時間である。

なお、板の対称性により板の $1/4$ 部分のみ考慮すればよく、一様応力場の問題であるから変位関数は C.S.T. (Constant Strain Triangular) によった。

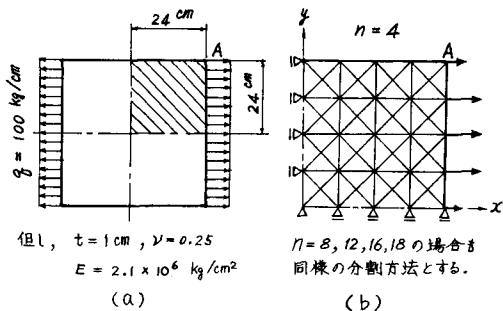


図-2

n	節点数	要素数	元数	平方根法		LR 法		計 算 時 間		
				A点の変位($\times 10^{-3}$)	相対誤差	A点の変位($\times 10^{-3}$)	相対誤差	バンドマトリクス法	索引付消去法	逆マトリクス法
4	41	64	72	0.1142863	5.25×10^{-6}	0.1142843	1.22×10^{-5}	1分11秒	37秒	15分43秒
8	145	256	272	0.1142941	7.35×10^{-5}	0.1142748	9.55×10^{-5}	12分23秒	7分44秒	—
12	313	576	600	0.1143176	2.79×10^{-4}	0.1142486	3.24×10^{-4}	54分44秒	33分34秒	—
16	545	1024	1056	0.1143740	7.73×10^{-4}	0.1142022	7.31×10^{-4}	2時間42分54秒	1時間37分18秒	—
18	685	1296	1332	0.1144165	1.15×10^{-3}	0.1141632	1.07×10^{-3}	3時間46分20秒	2時間12分45秒	—
				弾性解 0.1142857 $\times 10^{-2}$ cm						

表-1 計算結果 (IBM 1130—半ワード/6K語で1語32bit使用)

表-1によると元数が小さい間は平方根法の方が精度が良いが、元数の増加と共にLR法の方が誤

差の累積の度合が平方根法より少くなり、1000元を越すとLR法の方が精度が良い。これはLR法が平方根の計算を行なわないためと思われる。なお、精度向上の一法として記憶容量が大きい場合は倍精度を使用すればよいが、記憶容量が小さい場合には主たる計算部分は積和であるので、例えばFORTRANでプログラムする場合、次のようにすればコア記憶使用量をほとんど増すことなく、かなり精度を上げることができる。

$$SUM = SUM + 1.0D0 * A(J) * A(K) \quad \text{ここに } SUM, 1.0D0 (=1.0) \text{ は倍精度、配列 } A \text{ は単精度。}$$

別の計算例として表-2に、ユニット分割法を加えた3方法の全処理時間を示す。

節点数	骨組要素数	三角形要素数	四角形要素数	元数	ユニット分割法	バンドマトリックス法	索引付消去法
411	137	39	320	2108	26	16	12

一般に索引付消去法の計算時間はユニット分割法の2/3~2/5、Band Matrix法の2/3~5/6で元数をまずにつれて計算時間の差は大きくなる結果が得られた。なお、LR法による索引付消去法で倍精度を使用して約2400元を計算したところ、平衡チェックでの誤差は10⁻¹⁰以下であつた。以上より、索引付消去法は、精度、計算時間および記憶容量の面から考えると、直接解法として有効な方法であると思われる。

§3 三角形要素の曲げに関して 三角形要素に関して種々の変位モデルが提案され比較検討されてきたが、比較検討の対称となつたのは主としてたわみに対してで、曲げモーメントに対してはたわみ程詳しく論ぜられていない。我々設計者としてはたわみより曲げモーメントの精度の方が問題となることが多い。本報告では剛性マトリックスにはH.C.T.の変位モデル(Clough(4)、以下H.C.T.という)を用いて変位を算出し、その変位を用いてTocherの変位モデル(以下Tocherという)より求めた応力マトリックスから曲げモーメントを算出し検討してみた。

1) H.C.T.について (文献(5)ではLCCT-9と称している) 図-3(a)に示すように原三角形要素を三つの部分三角形に分割し、各々の部分三角形毎に別々に次のようなたわみ形状函数とした。

$$\bar{w}_a = \alpha_1 + \alpha_2 \bar{x} + \alpha_3 \bar{y} + \alpha_4 \bar{x}^2 + \alpha_5 \bar{x} \bar{y} + \alpha_6 \bar{y}^2 + \alpha_7 \bar{x}^3 + \alpha_8 \bar{x} \bar{y}^2 + \alpha_9 \bar{y}^3 \quad (5)$$

式(5)は9個の任意定数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_9$ を含むが、 $\bar{x}^2 \bar{y}$ の項が除去してあるためj k辺上で $\partial w_a / \partial \bar{y}$ は $\bar{x}$ の一次式となり、節度jおよびkで適合条件を満たしているの
で、j k辺上では自動的に法線方向の傾斜の連続性が保たれ完全に適合条件を満たす。したがつて、分割数を増せば変位は必ず正解値に収束するが、曲げモーメントの精度が変位のそれほど良くない。

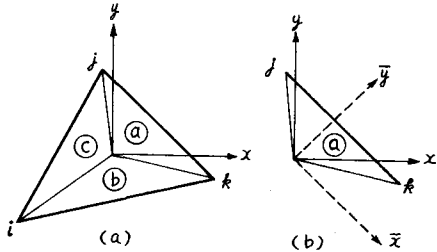


図-3

2) Tocherについて Tocherは9個の自由度をもち、x, yの対称性も考慮して次のようなたわみ形状函数とした。

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 (x^2 y + xy^2) + \alpha_9 y^3 \quad (6)$$

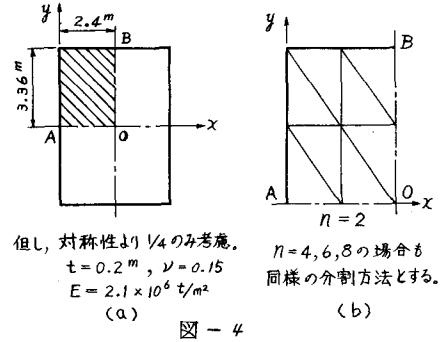
結果は良好な場合もあるが、辺での法線方向の傾斜の適合条件を満たしていないので、収束が悪く全般的には必ずしも良くない。変位、曲げモーメントは過大となる傾向が見られた。

3) 計算例 図-4(a)に示すような矩形板に等分布荷重 $q=10 \text{ t/m}^2$ あるいは中央点Oに集中荷重 $P=40 \text{ t}$ が作用した時、図-4(b)に示すように、 $n=4, 6, 8$ と分割した場合、次の三ケース

について計算を行い比較検討してみた。

①剛性マトリックス、応力マトリックス共に *Tocher*-で計算した場合。 ②剛性マトリックス、応力マトリックス共に *HCT* で計算した場合。 ③剛性マトリックスは *HCT* で、応力マトリックスは *Tocher* で計算した場合。

以上の三ケースについて周辺固定支持および周辺単純支持の場合について計算した結果を表-3および表-4に示す。なお、弾性解は *Timoshenko* によるものである。



	n	等分布荷重 $q = 10 \text{ t/m}^2$					集中荷重 $P = 40 \text{ t}$				
		$w - 0$	$M_x - 0$	$M_y - 0$	$M_x - A$	$M_y - B$	$w - 0$	$M_x - 0$	$M_y - 0$	$M_x - A$	$M_y - B$
Ⅰ	2	0.007704	13.209	8.282	-12.059	-11.173	0.004930	9.487	7.785	-3.912	-2.119
	4	0.006726	13.404	9.557	-8.871	-10.255	0.004136	14.604	13.381	-3.089	-1.858
	6	0.006356	13.229	9.604	-7.756	-9.315	0.003907	17.483	16.356	-2.760	-1.705
	8	0.006178	13.135	9.593	-7.018	-8.711	0.003771	19.516	18.426	-2.567	-1.609
Ⅱ	2	0.005306	6.849	7.193	-10.478	-5.700	0.002591	4.823	4.937	-4.524	-1.644
	4	0.005635	7.052	6.828	-13.096	-8.335	0.003109	8.150	8.213	-5.342	-1.998
	6	0.005682	6.860	6.573	-14.242	-9.641	0.003217	9.863	9.927	-5.691	-2.159
	8	0.005697	6.779	6.473	-14.843	-10.406	0.003258	11.070	11.135	-5.865	-2.252
Ⅲ	2	0.005306	6.913	6.458	-10.478	-5.700	0.002591	4.283	4.333	-4.524	-1.644
	4	0.005635	8.046	5.557	-13.096	-8.335	0.003109	7.770	7.417	-5.342	-1.998
	6	0.005682	8.076	5.233	-14.242	-9.641	0.003217	9.529	9.105	-5.691	-2.159
	8	0.005697	8.077	5.105	-14.843	-10.406	0.003258	10.754	10.303	-5.865	-2.252
弾性解		0.005706	8.041	4.885	-16.727	-13.087	0.003311	—	—	-6.416	—

表-3 周辺固定支持の場合の計算結果 (単位: m, t-m)

	n	等分布荷重 $q = 10 \text{ t/m}^2$			集中荷重 $P = 40 \text{ t}$		
		$w - 0$	$M_x - 0$	$M_y - 0$	$w - 0$	$M_x - 0$	$M_y - 0$
Ⅰ	2	0.02580	28.710	22.277	0.010067	14.208	12.557
	4	0.02235	28.605	22.115	0.008658	18.875	17.301
	6	0.02133	28.434	22.019	0.008150	21.678	20.151
	8	0.02085	28.339	21.963	0.007890	23.677	22.172
Ⅱ	2	0.01749	13.193	13.141	0.006216	7.024	7.104
	4	0.01906	14.541	14.070	0.006871	10.325	10.359
	6	0.01934	14.703	14.152	0.007005	12.103	12.130
	8	0.01943	14.752	14.175	0.007053	13.332	13.358
Ⅲ	2	0.01749	13.924	10.948	0.006216	6.604	6.160
	4	0.01906	16.592	11.576	0.006871	10.122	9.353
	6	0.01934	17.050	11.602	0.007005	11.949	11.113
	8	0.01943	17.210	11.602	0.007053	13.197	12.337
弾性解		0.01943	17.395	11.566	0.007112	—	—

表-4 周辺単純支持の場合の計算結果 (単位: m, t-m)

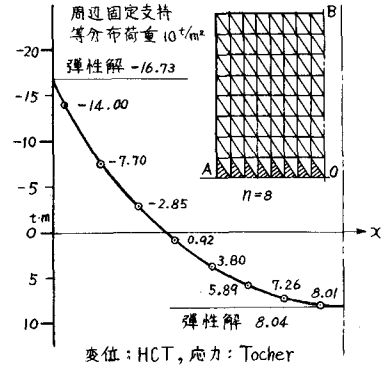


図-5

表-3および表-4によるとたわみの値は $n = 8$ で *HCT* によつてほぼ満足すべきものが得られている。 *HCT* で変位、*Tocher* で曲げモーメントを求めた場合、内部点では良い結果を示すが、境界(固定辺)ではまだ精度が悪くもつと分割数を増す必要がある。しかし、図-5に示すように要素の重心位置の曲げモーメントを求め、その値を連続曲線で滑らかに結ぶと、その延長は境界においてほぼ弾性解と一致するので若干の誤差は介入するが実用的な方法として用いることができよう。

- (1) Melosh, R.J., Bamford, R.M., "Efficient Solution of Load-Deflection Equations", ASCE, No. ST4; APR. 1969
- (2) Melosh, R.J., "Structural Analysis and Matrix Interpretive System", JPL, TM33-307 & TM33-311; DEC. 1966
- (3) Melosh, R.J., "Computer Analysis of Large Structural System", AIAA, No. 67-955; OCT. 1967
- (4) Clough, R.W., "Finite Element Stiffness Matrix Analysis of Plate Bending", AFIT; OCT. 1965
- (5) Clough, R.W., "A Refined Quadrilateral Element for Analysis of Plate Bending", The 2nd AFIT; 1968