

名古屋大学 正員 〇 川本 龍 万
 名古屋大学 学生員 梶田 建夫
 名古屋大学 学生員 宮池 克人
 中部電力技研 正員 宮口 友延

1. はじめに

有限要素の概念が弾性連続体の応力解析に用いられるようになってから10年近くにもなり、現在では種々の土木構造物の応力や変形状態を求めるために、さかんに有限要素法が適用されている。この方法を適用する場合、技術者にとってもっとも関心のあつたのはその解の精度の問題であらう。また、具体的には要素の分割方法、要素形状や剛性方程式(多元連立方程式)の解法など、その解の収束性にも注意が向けられなければならない。一般に、有限要素法による解析結果には、2種類の誤差が含まれる。その一つは要素分割による誤差(discretization error)であり、無限個の自由度を有する連続体と有限個の自由度しかもたないモデルに近似すること起因するものである。他の一つは、丸めの誤差(rounding error)と呼ばれるもので、演算過程において生ずるものである。ここでは、二次元(平面および軸対称)弾性問題に限定して、有限要素法と適用する際に生じる上記のような実際的な問題点について、著者の経験を述べる。ここで述べる有限要素解析法は C.S.T. Model と L.S.T. Model を用いた変形法によるもっとも普通のものである。当然、これらの要素は適合型要素(Compatible element)で、要素の大きさが無限小になると、解が真の値に収束する。

2. 表面荷重と物体力による解の特性

図-1のような板が辺12で等分布鉛直荷重 P を受ける場合と、 $Y = \delta$ なる物体力を受ける場合の各要素の主応力およびその方向を計算すると、表-1のようである。表面荷重に対しては、要素分割による影響はほとんど見られぬが、物体力(自重)の場合には、その等価節点荷重と各要素の節点に集中的にかけることになるので、要素の分割による特性が顕著な傾向がある。要素5と要素6の重心の位置における鉛直応力と $\sigma_y = \delta y$ で計算すると、 $(\sigma_y)_5 = 2.333 \delta x$ 、 $(\sigma_y)_6 = 2.667 \delta x$ となり、 $\sigma_y = \delta y$ の値は表-1の値より要素1, 3, 5では小さく、要素2, 4, 6では大きくでる。

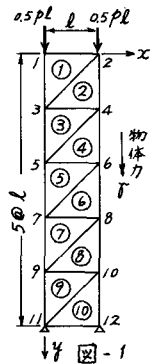
3. 要素形状および分割パターンによる解の特性

要素分割による誤差は、具体的に見ると、次のような原因から生ずると考えられる。すなわち、i)要素モデル内で仮定した変位、ii)節点変位(厳密には面取変位を考慮する)、iii)外力の表現、iv)境界条件、v)要素分割。いま要素の大きさを無限小にしたとき、丸めの誤差を考慮しなければ、要素分割による誤差が0に収束するかどうかにより、解が真の解に収束するかどうか判定できる。このために、従来より行われていた階差方程式

表-1

要素	等分布表面荷重			物体力(自重)		
	σ_1/P	σ_2/P	θ	$\sigma_1/\delta x$	$\sigma_2/\delta x$	θ
1	-0.6735×10^{-5}	-1.0000	0°	-0.2633×10^{-1}	-0.3646	-4.90°
2	-0.1431×10^{-5}	-1.0000	0°	0.7548×10^{-1}	-0.6391	2.31°
3	-0.1431×10^{-5}	-1.0000	0°	-0.6913×10^{-1}	-1.3578	-1.07°
4	-0.1764×10^{-4}	-1.0000	0°	0.7181×10^{-1}	-1.6430	0.80°
5	-0.2527×10^{-3}	-1.0000	0.003°	-0.7122×10^{-1}	-2.3577	-0.60°
6	-0.3722×10^{-3}	-1.0000	0.003°	0.6978×10^{-1}	-2.6429	0.51°
7	-0.5756×10^{-2}	-1.0010	-0.06°	-0.7406×10^{-1}	-3.3624	-0.50°
8	-0.8516×10^{-2}	-0.9990	0.06°	0.2907×10^{-1}	-3.6382	0.45°
9	-0.1275×10^{-1}	-1.0232	-1.29°	-0.1334	-4.4754	-1.02°
10	-0.1948	-0.9779	1.67°	-0.9006	-4.5344	-2.17°

により、解が真の解に収束するかどうか判定できる。このために、従来より行われていた階差方程式における discretization error の解析に用いられる方法が有限要素法に適用される。有限要素方程式(剛性方程式)は節点変位と節点外力とによって表わされた節点におけるつり合方程式であること



より, Taylor 展開を用いてこれらのつり合式中に含まれる節点のうち, 注目する節点を囲む節点の変位を, 注目する節点の変位と, 対応する要素の大きさの関数として表わすことができる。この結果, 有限要素式は変位の微分形式で表われ, これは連続体の変配方程式(力のつり合方程式)と比較される。平面応力状態における図-2のような分割パターンに対しては, つり合方程式は変位に関して次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \text{パターン A} : & u_{xx} + \frac{1-\nu}{2} u_{yy} + \frac{1+\nu}{2} v_{xy} + \frac{P_x}{B} + R_1(h^2) = 0 \\ \text{および D} : & \frac{1+\nu}{2} u_{xy} + \frac{1-\nu}{2} v_{xx} + v_{yy} + \frac{P_y}{B} + R_2(h^2) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{パターン B} : & u_{xx} + \frac{1-\nu}{2} u_{yy} + \frac{P_x}{B} + R_3(h^2) = 0 \\ & \frac{1-\nu}{2} v_{xx} + v_{yy} + \frac{P_y}{B} + R_4(h^2) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{パターン C} : & u_{xx} + \frac{1-\nu}{2} u_{yy} + (1+\nu) v_{xy} + \frac{P_x}{B} + R_5(h^2) = 0 \\ & (1+\nu) u_{xy} + \frac{1-\nu}{2} v_{xx} + v_{yy} + \frac{P_y}{B} + R_6(h^2) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで, u, v はそれぞれ x, y 方向の変位, P_x, P_y は物体力の成分を表わし, u, v の添字の変数は, それらについての微分を表わす。また, $R(h^2)$ は h^2 以上の高次の項を表わし, $B = Et/(1-\nu^2)$ である。一方, 二次元平面応力状態におけるつり合方程式は,

$$u_{xx} + \frac{1-\nu}{2} u_{yy} + \frac{1+\nu}{2} v_{xy} + \frac{P_x}{B} = 0, \quad \frac{1+\nu}{2} u_{xy} + \frac{1-\nu}{2} v_{xx} + v_{yy} + \frac{P_y}{B} = 0 \quad (4)$$

(1)~(3) 式を (4) 式と比較すると, パターン A, D の場合はいずれも (4) 式に収束し, 誤差は h^2 のオーダーで常に収束するが, パターン B の場合は u_{xy}, v_{xy} の項が含まれず, また, パターン C の場合には u_{xy}, v_{xy} の項が2倍になつていて, いずれも節点におけるせん断挙動が十分に表われていないことを示している。パターン B および C のいずれにしても, 収束の困難さは要素の特性より要素の組合せの不適當さに起因するものである。実際上の問題として, 境界以外ではパターン B と C とは独立に現われることはなく, つねに対となつて現われるので, パターン B でのせん断剛性の不足は, パターン C での過剰により, ある程度相殺される。しかし, これらのパターンでは, 真の値に収束するという保証はなからため, やはりこのような分割パターンは避けるべきであろう。

図-3 に示すような一端固定の片持ばりの自由端にせん断荷重を予え, 自由端での中立軸のたわみと計算し, 弾性理論により求められた解と比較したものを示すと, 図-4 のようである。有限要素の分割はパターン A, パターン B と C の組合せで行なわれ, 解析にはユニット分割法が用いられている。図-4 において, 上限とは固定端の中立軸上

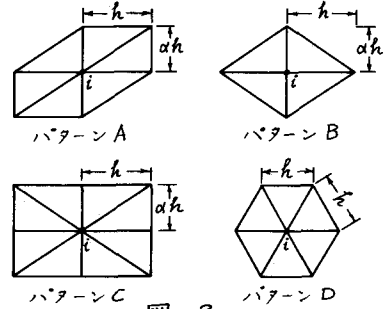


図-2

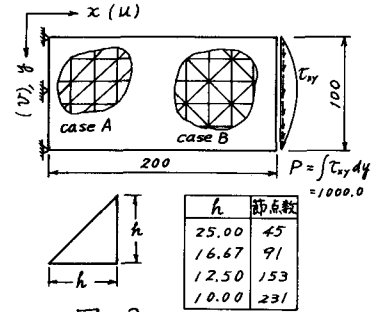


図-3

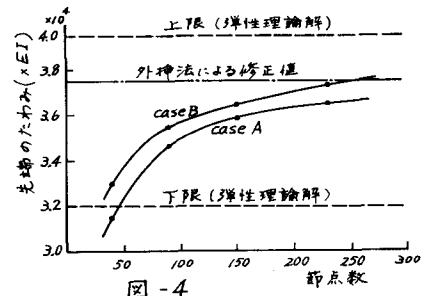


図-4

で軸方向要素が固定された場合の値

表-2

であり、下限とは固定端の中軸線においてそれに直角な端面の要素が固定された場合の値である。

要素分割による要素間の応力の不連続性をあきらめるために、節点における応力値としてそのまわりの要素の応力値の平均値とされているが、その節点のまわりの要素の形状や寸

(a) タイプAパターン							(b) タイプBパターン						
要素	σ_x	σ_y	θ	σ_x	σ_y	τ_{xy}	要素	σ_x	σ_y	θ	σ_x	σ_y	τ_{xy}
71	5.899	0.484	83°	0.596	5.787	-0.773	71	5.230	0.239	81°	0.338	5.131	-0.695
72	6.033	0.495	88°	0.624	5.903	-0.837	72	6.407	0.843	104°	1.026	6.224	-0.992
73	6.467	0.587	53°	0.637	6.416	-0.540	73	5.991	0.413	54°	0.462	5.942	-0.517
84	6.442	0.643	104°	0.831	6.255	-1.027	85	7.067	1.064	94°	1.225	6.906	-0.970
85	6.385	1.032	68°	1.111	6.902	-0.697	86	6.872	0.976	58°	1.036	6.812	-0.593
86	6.968	0.783	68°	0.870	6.881	-0.725	87	7.406	1.077	64°	1.155	7.328	-0.698
平均節点応力							平均節点応力						
0.778 6.357 -0.766							0.874 6.224 -0.744						

(c) タイプAパターン							(d) タイプBパターン						
要素	σ_x	σ_y	θ	σ_x	σ_y	τ_{xy}	要素	σ_x	σ_y	θ	σ_x	σ_y	τ_{xy}
72	6.180	0.624	82°	0.737	6.066	-0.786	72	6.636	1.216	25°	1.227	6.625	-0.240
73	6.026	0.406	70°	0.489	5.943	-0.680	73	6.333	0.416	65°	0.492	6.257	-0.666
74	6.605	0.657	53°	0.707	6.555	-0.542	84	4.754	0.143	84°	0.242	3.655	-0.668
84	6.037	0.415	110°	0.620	5.831	-1.054	85	7.972	2.178	21°	0.219	7.965	-0.208
85	6.948	1.093	78°	1.201	6.840	-0.789	86	7.764	1.244	96°	1.424	7.584	-1.067
86	6.700	0.636	72°	0.731	7.343	-0.755	87	7.261	0.798	82°	0.929	7.131	-0.909
平均節点応力							平均節点応力						
0.748 6.430 -0.867							0.755 6.703 -0.626						

法、分割パターンによって、節点応力にはばり変わる。1例として、図-5のように底面で固定された二等辺三角形板が鉛直下向きに物体力の作用($X=0$, $Y=8$)を受ける場合を考える。図-6に示すような4種の分割パターンに対して応力解析を行ない、同一節点52のまわりの各要素の応力値およびそれらの平均値としての節点52における応力を求めると、表-2のようである。これらの分割パターンに対して特定の節点変位について解(over-relaxation factor $\beta=1.86$ と1で Gauss-Seidel 反復法による)の収束状態を調べると、(a)では $IT=50$ 回で4桁まで収束し、もっとも収束が速く、(b)では $IT=100$ 回で4桁、(c)では $IT=100$ 回で2桁と収束が悪く、(d)では $IT=70$ 回で4桁と比較的に収束は良好であった。

4. 応力集中部分における外挿法の適用

前述の分割パターンAおよびDに対する有限要素方程式は誤差が h_i^2 のオーダーで支配方程式に収束する。それで、Richardsonの外挿法の考え方を適用して、次のように有限要素法の解を改良することが出来る。いま、支配的誤差を次のように仮定する。

$$R = Ch_i^2 \quad (5)$$

ここに、 C は定数である。パターンAまたはDに従う2種類の分割I, Jより得られたある値を、それぞれ y_I , y_J とし、真の値を y とする。また、それぞれの要素の大きさを h_i , h_J とすると、(5)式が成立するとき、

$$\Delta R_{IJ} = y_I - y_J = C(h_i^2 - h_J^2) \quad (6)$$

が成立する。同様にして、

$$\Delta R_{J0} = y_J - y_0 = C(h_J^2 - h_0^2) \quad (7)$$

(6), (7)式より定数 C を消去すると、

$$y_J - y_0 = \frac{y_I - y_J}{h_i^2 - h_J^2} (h_J^2 - h_0^2) \quad (8)$$

ここで、 $h_0 \rightarrow 0$ とすると、 $y_0 \rightarrow y$ であるから、上式は次のようになる。

$$y = y_J + \frac{1}{(h_i/h_J)^2 - 1} (y_J - y_I) \quad (9)$$

このように、ある2つの結果が与えられてい

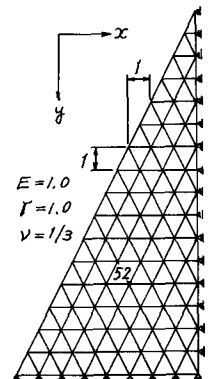


図-5

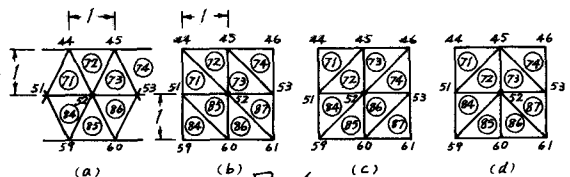


図-6

るとき、上式を用いて正しい結果を推定することが出来る。

この外挿法の考えと図-3の片持ばりの場合に用いた結果が、図-4に示されている。また、円孔を有する無限板が一軸応力分布荷重（ y 方向に p ）をうける場合に対して、図-7に示すようにパターン A の分割を行ない、円孔周辺の要素分割が 6 等分（ $\alpha = 15^\circ$ ）、10 等分（ $\alpha = 9^\circ$ ）、12 等分（ $\alpha = 7.5^\circ$ ）の 3 つの場合に対して解析を行ない、その結果、その組み合わせによる外挿法を適用して修正した値、および、弾性理論値と比較した。表-3 に円孔周辺上の 2, 3 の点における変位の値が示されている。また、外挿法によって改善された円孔周辺の $\theta = 0^\circ$ における応力と示すと、表-4 のようである。外挿法を適用することにより、解の精度は著しく向上すること、および、分割の粗細による解のはらつきが小さくなることがわかる。

有限要素法で計算した変位を d_{fem} 、弾性理論値を d_{exact} とし、 $E = (d_{fem} - d_{exact}) / d_{exact}$ の値と分割の程度との関係を表わすと、図-8 のようである。

次に、 x 軸に沿う σ_y の分布、すなわち、 $(\sigma_y)_{\theta=0}$ の値を通りの方法で整理して、L.S.T. による値および理論値と比較した。その一例として $\alpha = 7.5^\circ$ の場合を示すと、図-9 のようである。応力に対して外挿法を適用した結果はこれに表-4 に示したが、その場合、面積の重みを考慮した平均値が用いられている。変位の場合と同様にかなり精度がよくなっている。

以上のほか、C.S.T. model と L.S.T. model に対する精度および計算時間の比較、多次連立方程式に因する問題、応力解放法を適用する場合の物体力の取り扱い、弾塑性解析における問題点などについて検討している。

参考文献

- 1) J. Watz and others: Accuracy and Convergence of Finite Element Approximations, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1968.
- 2) H. Ramstad: Convergence and Numerical Accuracy with Special Reference to Plate Bending, Finite Element Method in Stress Analysis, Edited by I. Holand and K. Bell, Tapir (1969), pp. 179 ~ 211

表-3

		u_{0°	u_{45°	v_{45°	v_{90°
C.S.T.	15.0°	-4.5800	-3.1797	9.4079	13.5756
	9.0°	-4.8346	-3.3740	9.7772	13.9645
	7.5°	-4.9105	-3.4388	9.8629	14.0723
Extrapolation	$15/9^\circ$	-4.8728	-3.4031	9.8327	14.0229
	$9/7.5^\circ$	-4.9813	-3.4994	9.9428	14.1729
	$15/7.5^\circ$	-4.8896	-3.4563	9.8935	14.1057
L.S.T.		-5.0367	-3.5399	10.043	14.1978
Exact solution		-5.0000	-3.5355	10.607	15.0000

表-4

	$\Sigma \sigma A / \Sigma A$	15°	9.0°	7.5°
15.0°	2.5940	—	2.8390	2.9558
9.0°	2.8070	—	—	3.0500
7.5°	2.9332	—	—	—

