

大阪工業大学

正員 岡村宏一

大阪設計コンサルタンツKK

正員 吉田公憲

同上

正員 ○進藤泰男

1. 序 リフ付き板のような偏心補剛される板の降伏条件、弾塑性挙動等については、現在のところ、十分に理論的究明がなされていないように思われる。本文に提示する解析法の骨子は、リフ付き板の構造要素である板およびリフのそれぞれに対して降伏条件、弾塑性挙動を支配する諸因子を定め、この2つの構造要素を合成させる手法によって一種の複合構造として取扱おうとするものである。

この研究はまた、薄肉構造の弾塑性立体解析¹⁾の基礎的段階としての意味を持っている。本学会に提出した別文で単一板について取扱ったように、この種の板構造では変形の増大に伴う膜作用を考慮しなければならぬが、本文では、リフ付き板の解析の第1段階として膜作用を無視し、曲げのみによる挙動を取扱った。なお、本文で提示する解法の特徴を述べれば大要次の通りである。

1) 連立非線形偏微分方程式の解法： 板はリフとの合成によって曲げならびに Scheibe 作用の双方を生ずる。しかも板内に塑性域を生ずれば、その釣合いおよび適合条件式は当然、連立非線形偏微分方程式になる。また、リフの基礎式も同様に非線形となる。従来、特に板の場合、これらの式を解くには適当な mesh を仮定し有限差分式に変換する方法等が用いられている。しかし、このような平板問題を薄肉立体構造の弾塑性立体解析の問題に拡張するに際し、構造全体の塑性化よりも部分的な塑性化がしばしば問題になるこの種の構造に対して上記の方法は要求される自由度の数が膨大なものになり、計算容量、精度の点で発展性に乏しい。筆者の一人はこれらの諸点を考慮の上、前述のような基礎式の1つの新しい解法¹⁾を提示した。この解法ではまず、塑性化した板内点を囲む比較的小さい有限領域では上記の諸式中の塑性変形に伴う物理量は平均値をもつものとみなしてこれらの式を線形化する。その結果、解は Fourier の無限級数による連続解で得られ、釣合いおよび適合条件式を解くための連立方程式を解く必要はなく、解の精度も向上する。また、この方法をリフに適用すれば、リフの解は簡単な代数関数で得られる。なお、解析の途上で塑性化した点の Plastic tensor の相互関係を表わす差分表示が用いられるが、これは後に述べる降伏条件式に関連してこれらの近似値を逐次求めるためのものである。

2) 合成条件： 合成条件は板とリフの合成面で要求される。この部分を完全合成させる方法はわれわれが既に若干の立体構造の弾性解析に用いた方法²⁾を応用する。合成条件式も非線形であるが、合成面に沿って選点を採りその点を囲む比較的小さい有限領域で不静定力を平均化する方法(矩形インパルスによる近似)が1)の方法と併用される。合成条件式は連立になるが、選点の数は構造全体の中では限られ、また解析の途上で square matrix は変化しないように操作される。

- 1) 岡村; 非平面保持の曲げを生ずる多室板構造の解法、(弾塑性解法); 土木学会関西支部年次学術講演会講演概要(昭和45年5月) 2) 岡村; 板とBeam系の合成構造の立体解析法ならびに板と格子桁の合成による橋梁解析への応用; 土木学会年次大会講演概要(昭和43年10月)

3) 塑性条件: 構造材料は弾完全塑性体とし、応力-歪条件は *Plandtl-Reuss* の方程式に支配されるものと考え、立体構造において起り得る除荷の経路に対応できるものとする。また、板、リブの双方共、平面保持の仮定を容認し、断面の塑性化は *fully Plastic* を意味するものとする。曲げと *Scheibe* 作用の共存する板内の塑性化した点の降伏条件には *Ilyusin, Rosenblum* 等の近似法を適用させる。塑性化した各点で同時に満足すべき降伏条件式は *Ch. Massonet* の方法³⁾ を拡張し、1) 2) に示した方法と併用することにより線形化する。

2 リブと合成される板の基礎式とその解の誘導:

図-1 に示す厚さ h の板の微小エレメントについて、外荷重およびリブとの合成面において作用する不静定力として板の上下面に作用する鉛直力、 x, y 各方向の水平せん断力をそれぞれ、 q_0, q_u, S_x, S_y とし、板のたわみを w 、曲げ剛度 $D [= \frac{ER^3}{12(1-\nu^2)}$ 、 E : 弾性係数、 ν : ポアソン比]、曲げモーメントおよび軸力の

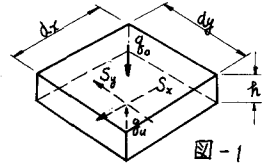


図-1

Component を $M_x, M_y, M_{xy}, N_x, N_y, N_{xy}$ で表わし、応力関数 ϕ 、中央面における塑性ポテンシャル f を導入すれば、板の曲げならびに *Scheibe* 作用を支配する基礎式は次のように書かれる。

$$\Delta \Delta w = \frac{1}{D} \left\{ q_0 - q_u - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} \right) \right\} - \frac{4}{h} \int_0^t \psi(x, y) dt \quad \text{----- (1)}$$

$$\Delta \Delta \phi = \frac{1}{h} \left\{ \nu \left(\frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} \right) - \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} (S_x dx) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (S_y dy) \right\} \right\} - E \int_0^t \Gamma(x, y) dt \quad \text{----- (2)}$$

式中、時間 t に関する積分項は塑性変形に従属する項であり、塑性ポテンシャル

$$f = m_x^2 + m_y^2 - m_x m_y + 3m_{xy}^2 + n_x^2 + n_y^2 - n_x n_y + 3n_{xy}^2 \quad \text{----- (3)}$$

$$m_x = \frac{M_x}{M_p}, m_y = \frac{M_y}{M_p}, m_{xy} = \frac{M_{xy}}{M_p}, n_x = \frac{N_x}{N_p}, n_y = \frac{N_y}{N_p}, n_{xy} = \frac{N_{xy}}{N_p}, M_p = \frac{\sigma_p}{4} h^2, N_p = \sigma_p h$$

に關与して、時間積分を荷重段階の和に置換し次のように書かれる。

σ_p : 降伏応力

$$\int_0^t \psi(x, y) dt = \sum_j \left\{ \psi(x, y) \right\}_j^\dagger, \quad \psi(x, y) = \frac{1}{M_p} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\mu M) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\mu M') - 6(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\mu M_{xy}) \right\} \quad \text{----- (4)}$$

$$\int_0^t \Gamma(x, y) dt = \sum_j \left\{ \Gamma(x, y) \right\}_j^\dagger, \quad \Gamma(x, y) = \frac{1}{N_p} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\mu N) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\mu N') - 6 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\mu N_{xy}) \right\} \quad \text{----- (5)}$$

$$M = (2-\nu)M_x - (1-2\nu)M_y, M' = (2-\nu)M_y - (1-2\nu)M_x, N = 2N_x - N_y, N' = 2N_y - N_x \quad \text{----- (6)}$$

ここで、 j は荷重の *step*、 μ は *Plastic tensor of Intensity* である。次に、断面力、および中央面における歪は以下のように表示される。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{4D}{h M_p} \sum_j (\mu M)_j^\dagger, & M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{4D}{h M_p} \sum_j (\mu M')_j^\dagger \\ M_{xy} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{12D}{h M_p} (1-\nu) \sum_j (\mu M_{xy})_j^\dagger, & N_x &= h \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \int S_x dx, \\ N_y &= h \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \int S_y dy, & N_{xy} &= -h \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}, & E_x &= \frac{1}{E h} (N_x - \nu N_y) + \frac{1}{N_p} \sum_j (\mu N)_j^\dagger \\ E_y &= \frac{1}{E h} (N_y - \nu N_x) + \frac{1}{N_p} \sum_j (\mu N')_j^\dagger, & \gamma_{xy} &= \frac{2}{E h} (1+\nu) N_{xy} + \frac{6}{N_p} \sum_j (\mu N_{xy})_j^\dagger \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (7)}$$

非線形方程式 (1), (2) の解、 w, ϕ は前節 1) および 2) で述べた解法上の工夫に基づき、図-2, 3 に示すように塑性変形の従属関数、 $\psi(x, y), \Gamma(x, y)$ ならびに合成面に作用する不静定力の近似分布を考へて *Fourier 級数* による連続解として以下のように得られる。なお本文では、板の周辺条件として、

3) *Ch. Massonet ; General Theory of Elasto-Plastic Membrane Plates; Eng. Plasticity (1968)*

曲げ作用に対し単純支持、Scheibe 作用に対し周辺に直角な方向に無拘束とした。また、水平せん断力によって板に生ずる曲げを無視する。更に紙面の都合上、リフが一方方向のみに配置される場合の解を記述する。

$$W(u,v) = \frac{16a^2}{\pi^6} \left[\frac{a^2}{D} \{ g_0 \Omega_0(u,v) - \sum_r \sum_r P_{kr} \Omega_{kr}(u,v) \} - \frac{4}{\pi MP} \sum_i \left\{ \sum_{k=1}^{j-1} \bar{\psi}_{(x_i, y_i)}^k + \bar{\psi}_{(x_i, y_i)}^j \right\} \Omega_i(u,v) \right] \text{-----(8)}$$

$$\phi(u,v) = \frac{16a^2}{\pi^6} \left[\frac{\pi a}{P} \sum_r \sum_r t_{kr} \{ \lambda^2 \wedge_{kr}(u,v) - \nu \wedge'_{kr}(u,v) \} - \frac{E}{N_P} \sum_i \left\{ \sum_{k=1}^{j-1} \bar{\Gamma}_{(x_i, y_i)}^k + \bar{\Gamma}_{(x_i, y_i)}^j \right\} \Omega_{\lambda}(u,v) \right] \text{-----(9)}$$

式中、 $\Omega_0(u,v) = \sum_m \sum_n \frac{\sin \alpha_m x_0 \sin \beta_n y_0}{m n (m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \sin \alpha_m u \sin \beta_n v$
 $\Omega_{kr}(u,v) = \sum_m \sum_n \frac{\sin \alpha_m x_r \sin \beta_n y_k}{m n (m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \sin \alpha_m u \sin \beta_n v$
 $\Omega_{\lambda}(u,v) = \sum_m \sum_n \frac{\sin \alpha_m x_i \sin \beta_n y_i}{m n (m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \sin \frac{m\pi}{2L} \sin \frac{n\pi}{2S} \sin \alpha_m u \sin \beta_n v$
 $\wedge_{kr}(u,v) = \sum_m \sum_n \frac{\cos \alpha_m x_r \sin \beta_n y_k}{n (m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \sin \alpha_m u \sin \beta_n v$
 $\wedge'_{kr}(u,v) = \sum_m \sum_n \frac{n \cos \alpha_m x_r \sin \beta_n y_k}{m^2 (m^2 + \lambda^2 n^2)^2} \sin \alpha_m u \sin \beta_n v$
 ただし、 $\alpha_m = \frac{m\pi}{a}$, $\beta_n = \frac{n\pi}{b}$, $\lambda = \frac{a}{b}$, (u,v) : 板内任意の座標である。これから $\Omega, \wedge$ は総和公式により単級数に変換し十分収束値を与えることができる。また、(8)、(9) を (7) に代入し Z 断面力、歪が求められる。(8)、(9) の各式に含まれる $\bar{\psi}(x_i, y_i)$ は (4)、(5) より塑性化してゐる。はらびに周囲の 8 本の断面力の近似値 (逐次計算の過程での) を与えれば、図-5 のネットを用いて各点の μ の代数関数として次のように与えられる。

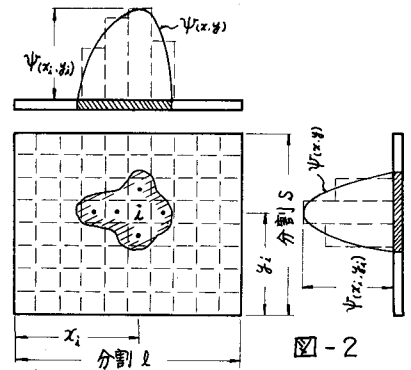
$$\bar{\psi}_{(x_i, y_i)} = \lambda^2 \{ \mu_{\lambda(1)} \mu_{\lambda(1)} + \mu_{\lambda(1)} \mu_{\lambda(1)} \} + (\lambda S)^2 \{ \mu_{\lambda(2)} \mu_{\lambda(2)} + \mu_{\lambda(2)} \mu_{\lambda(2)} \} - 2 \mu_{\lambda(0)} \{ \lambda^2 \mu_{\lambda(0)} + (\lambda S)^2 \mu_{\lambda(0)} \} - \frac{3}{2} (1-\nu) \lambda S \{ \mu_{\lambda(1,2)} (M_{2y})_{\lambda(1,2)} - \mu_{\lambda(1,2)} (M_{2y})_{\lambda(1,2)} + \mu_{\lambda(1,2)} (M_{2y})_{\lambda(1,2)} + \mu_{\lambda(1,2)} (M_{2y})_{\lambda(1,2)} \} \text{-----(10)}$$

$\bar{\Gamma}(x_i, y_i)$ も同様に求まるが紙面の都合で省略する。

3 リフの基礎式とその解の誘導: 1節, 1), 2)で述べ

た解法上の工夫はリフにも同様に適用される。リフには図-3 および図-4 に示すように板との間に受け渡される不静定力、はらびに塑性域の影響が考えられる。リフのたわみを w' 、曲げ剛度を EI 、[本文ではリフの断面を矩形断面 ($B \times H$) として扱った。] 曲げモーメントおよび軸力を M_x, N_x 、軸歪を ε_x 、さらに板からリフに伝達される鉛直、水平各方向の分布不静定力を P', S' で表わすと、リフの基礎式は次のように書かれる。

$$\frac{d^4 w'}{dx^4} = \frac{1}{EI} \left(P' - \frac{H}{2} \frac{ds'}{dx} \right) - \frac{4}{H} \int_0^x \psi'(x) dt \text{-----(11)}$$



塑性域と塑性変形関数 $\psi(x, y)$ の近似 ($\Gamma(x, y)$ も同様に近似される。)

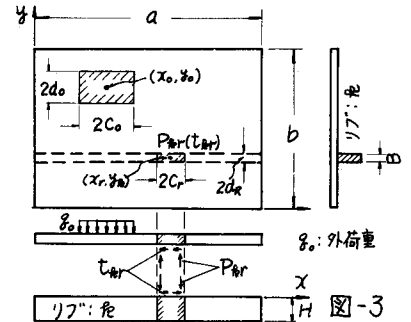


図-3

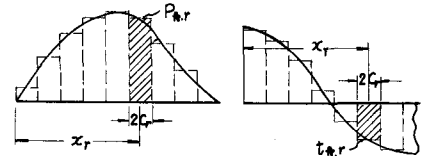
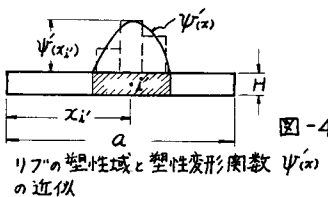


図-4



リフの塑性域と塑性変形関数 $\psi(x)$ の近似

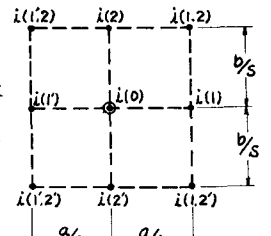


図-5. i 点 [$i(0)$] を囲む 8 本の点の指標

また、軸歪および降伏条件式は以下のように表わされる。

$$\varepsilon'_x = \frac{N'_x}{EBH} + \int_0^t \Gamma'_x dt \quad \text{----- (12)}$$

$$f' = (m'_x)^2 + (n'_x)^2 = 1 \quad \text{----- (13)} \quad m'_x = \frac{M'_x}{M_p}, \quad n'_x = \frac{N'_x}{N_p}, \quad M_p = \frac{\sigma_0 B}{4} H^2, \quad N_p = \sigma_0 BH,$$

時間 \$t\$ に関する塑性変形の従属項は板の場合と同様の処理を行なうことにより

$$\int_0^t \Psi'_x dt = \sum_i \{ \Psi'_x(x_i) \}^{\dot{t}}, \quad \int_0^t \Gamma'_x dt = \sum_i \{ \Gamma'_x(x_i) \}^{\dot{t}}, \quad \Psi'_x = \frac{d^2 \mu'}{dx^2}, \quad \Gamma'_x = \frac{2}{N_p} (\mu' N'_x) \quad \text{----- (14)}$$

曲げモーメント、軸力、軸歪は次のように求められる。

$$M'_x = -EI \left(\frac{d^2 w'}{dx^2} + \frac{4}{H} \sum_i \mu_i^{\dot{t}} \right), \quad N'_x = -\int S' dx, \quad \varepsilon'_x = \frac{N'_x}{EBH} + \frac{2}{N_p} \sum_i (\mu' N'_x)^{\dot{t}} \quad \text{----- (15)}$$

たわみ \$w'\$, 軸歪 \$\varepsilon'\$, 断面力の解は前述の解法上の工夫により、矩形インパルス \$P_{Per}\$, \$T_{Per}\$, 塑性化した点 \$i\$ の \$\{ \Psi'_{Per}(x_i) \}^{\dot{t}}, \{ \Gamma'_{Per}(x_i) \}^{\dot{t}}\$ を未知量とする代数関数で得られるが、紙面の都合で記述を省略する。また、関数 \$\Psi'\$ は板の場合と同様差分法により \$\mu'\$ の代数関数として与えることができる。

4 合成条件式: 合成条件式は合成面上に採った選点 \$(x_r, y_r)\$ において、板およびリフのたわみ、水平変位を等置することにより得られ、\$P_{Per}\$, \$T_{Per}\$ を定める連立方程式を形成する。

5 降伏条件ならびに

逐次計算の方法:

板およびリフの塑性化した点 \$i, j\$ の降伏条件は

$$f_i = f'_i = 1 \quad \text{----- (16)}$$

\$f < 1\$ なる場合は弾性経路上にありこの時点では

\$\mu = \mu' = 0\$ である。構造内に塑性域が生じた場合の逐次計算法は Ch. Massonnet の方法を拡大して行なうが詳細は前報告¹⁾ 及び右のプロック図を参照ねがいたい。荷重段階が \$j-1\$ から \$j\$ の段階に移行する時の Cycle: S の過程で \$M, N\$ の近似値 \$M^{j,S}, N^{j,S}\$ を与ればこの時点での \$M, N\$ の変化量、\$\Delta M^{j,S}, \Delta N^{j,S}\$ は \$\mu^{j,S}\$ の代数関数として表わされる。板およびリフの塑性域にある各点 \$i, j\$ で要求される降伏条件式 \$[\mu^{j,S}, (\mu')^{j,S}]\$ を定める連立方程式はそれぞれの降伏条件が非線形であるので \$\Delta M, \Delta N\$ の 2 次項を無視して以下のように線形化する。

$$\text{板)} \quad \frac{1}{M_p} \{ M_x^{j,S} (2\Delta M_x^{j,S} - \Delta M_y^{j,S}) + M_y^{j,S} (2\Delta M_y^{j,S} - \Delta M_x^{j,S}) + 6M_{xy}^{j,S} (\Delta M_x^{j,S}) \} + \frac{1}{N_p} \{ N_x^{j,S} (2\Delta N_x^{j,S} - \Delta N_y^{j,S}) + N_y^{j,S} (2\Delta N_y^{j,S} - \Delta N_x^{j,S}) + 6N_{xy}^{j,S} (\Delta N_x^{j,S}) \} = 1 - f^{j,S} \quad \text{----- (17)}$$

$$\text{リフ)} \quad \frac{1}{M_p} [(\Delta M_x)^{j,S}] + \frac{1}{(N_p)^2} [2(N_x)^{j,S} (\Delta N_x)^{j,S}] = 1 - (f')^{j,S} \quad \text{----- (18)}$$

計算 Data については講演時に述べる。

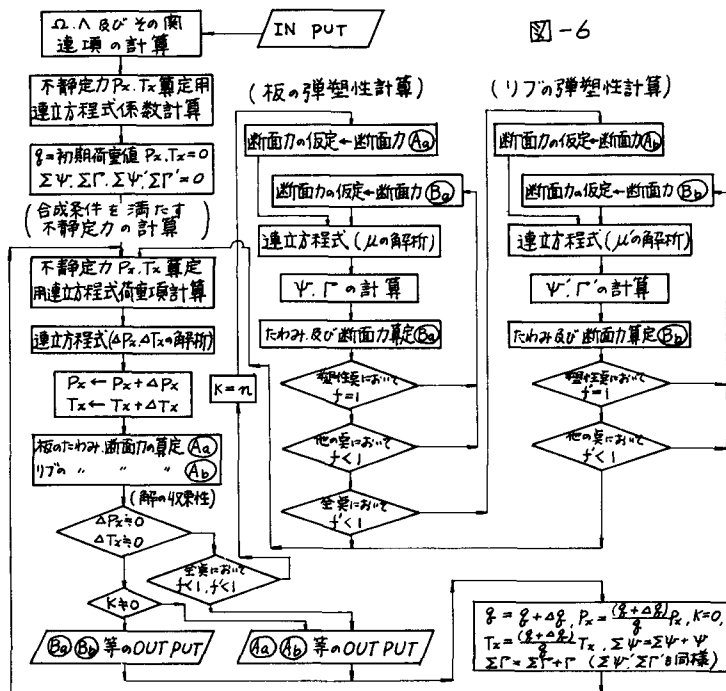


図-6