

空蘭工業大学 正員 能町純雄 同 松岡健一 学生員 ○ 沢田知之

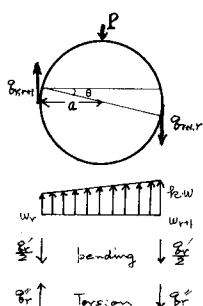
1 まえがき

本論文は棒状要素がスパン方向にヒンジ結合された構造物の応力解析について考察したものである。解析にあたり、棒状要素の断面は不変とし、弾性床にある場合を考へ、鉛直方向の変位と軸回りの回転変位を鉛直力と振りモーメントのつり合いから求め、ヒンジ接合点での力のつり合いを満足するように誘導された微分差分方程式に、定積分変換とフーリエ変換を用いて応力解析を進めた。この種の構造物は最近、従来のシートパイルに替り、剛性の大きいシートパイルとして橋梁等の基礎として用いられ、この構造物の応力解析のすべかりを得る為に行なつたものである。

2 スパン方向にヒンジ結合された円筒形棒状要素の解式

棒状要素 $r, r+1$ に対し、曲げにのみ参加する δ_r' , 振りにのみ参加する δ_r'' を考へることにより次の式が誘導される。

図-1



$$EI \cdot \frac{\ddot{w}_r + \ddot{w}_r}{2} = \delta_r' - \frac{w_r + w_r}{2} \cdot K + P_r = 0 \quad K = 2a^2 k \quad \text{---(1)}$$

$$GJ \cdot \frac{\ddot{w}_r - \ddot{w}_r}{2a} = -2a \cdot \delta_r'' + \frac{K \cdot a}{6} (w_r - w_r) \quad \text{---(2)}$$

EI = 曲げ剛性 w = たわみ a = 半径

GJ = 振り剛性 k = 地盤反力係数

故に $\delta_{r,r+1}' = \delta_r' - \frac{K}{2} \cdot \frac{w_r - w_r}{2}$, $\delta_{r,r+1}'' = \delta_r'' + \frac{K}{2} \cdot \frac{w_r - w_r}{2}$ の関係から $\delta_{r,r+1}', \delta_{r,r+1}''$ をたわみ w で表わすと

$$\delta_{r,r+1}' = \frac{K}{12} \cdot (w_r - w_r) - \frac{GJ}{4a^2} \cdot (\ddot{w}_r - \ddot{w}_r) - \frac{(w_r + w_r)}{4} \cdot K - EI \cdot \frac{(\ddot{w}_r + \ddot{w}_r)}{4} + \frac{P_r}{2}$$

$$\delta_{r,r+1}'' = \frac{K}{12} \cdot (w_r - w_r) - \frac{GJ}{4a^2} \cdot (\ddot{w}_r - \ddot{w}_r) + \frac{(w_r + w_r)}{4} \cdot K - EI \cdot \frac{(\ddot{w}_r + \ddot{w}_r)}{4} - \frac{P_r}{2}$$

よって節点条件 $\delta_{r,r+1}' - \delta_{r,r+1}'' = 0$ より

$$EI \cdot \frac{\ddot{w}_r + 2\ddot{w}_r + \ddot{w}_r}{4} + \frac{K \cdot (w_r + 2w_r + w_r)}{4} + \frac{GJ(\ddot{w}_r - 2\ddot{w}_r + \ddot{w}_r)}{4a^2} - \frac{K(w_r - 2w_r + w_r)}{12} = P_r$$

$$\therefore \frac{EI}{4} (\Delta^2 \ddot{w}_r + 4\ddot{w}_r) + \frac{GJ}{4a^2} \Delta^2 \ddot{w}_r + \frac{K}{6} \Delta^2 w_r + K w_r = P_r \quad \text{---(3)}$$

よって上式に定積分変換を行ない、 $\tilde{w}_i = \sum_{r=1}^{\infty} w_r \cdot \sin \frac{i\pi r}{n}$, $\tilde{P}_i = \sum_{r=1}^{\infty} P_r \cdot \sin \frac{i\pi r}{n}$ とおいて整理する。

$$\therefore \frac{EI}{4} \left[-\sin \frac{i\pi}{2} \left\{ (-1)^i \cdot \ddot{w}_n - \ddot{w}_0 \right\} - D_i \cdot \ddot{w}_i + 4 \cdot \ddot{w}_i \right] + \frac{GJ}{4a^2} \left[-\sin \frac{i\pi}{2} \left\{ (-1)^i \cdot \ddot{w}_n - \ddot{w}_0 \right\} - D_i \cdot \ddot{w}_i \right] + \frac{K}{6} \left[-\sin \frac{i\pi}{2} \left\{ (-1)^i \cdot w_n - w_0 \right\} - D_i \cdot w_i + 6 w_i \right] = \tilde{P}_i \quad \text{---(4)}$$

そこでさらに上式にフーリエ変換を行ない、式を整理すると

$$\left\{ \frac{EI}{4} \cdot D_i \left(\frac{\pi a}{l} \right)^4 - EI \left(\frac{\pi a}{l} \right)^2 - D_i \cdot \frac{GJ}{4a^2} \left(\frac{\pi a}{l} \right)^2 - \frac{K}{6} (6 - D_i) \right\} \cdot \tilde{w}_m(x) =$$

(次頁に続く)

$$\begin{aligned}
& \frac{EI}{4}(-1)^i S_i \left(-\frac{\pi\pi}{l}\right) \left\{ \ddot{w}_n(l)(-1)^m - \ddot{w}_n(0) \right\} + \frac{EI}{4}(-1)^i S_i \left(\frac{\pi\pi}{l}\right)^3 \left\{ w_n(l)(-1)^m - w_n(0) \right\} \\
& + \frac{EI}{4}(-1)^i S_i \left(\frac{\pi\pi}{l}\right)^4 w_{nm}(x) + \frac{EI}{4} S_i \left(\frac{\pi\pi}{l}\right) \left\{ \ddot{w}_0(l)(-1)^m - \ddot{w}_0(0) \right\} - \frac{EI}{4} S_i \left(\frac{\pi\pi}{l}\right)^4 w_{0m}(x) \\
& - \frac{EI}{4} S_i \left(\frac{\pi\pi}{l}\right)^3 \left\{ w_0(l)(-1)^m - w_0(0) \right\} + \frac{EI}{4} D_i \left(\frac{\pi\pi}{l}\right) \left\{ \ddot{\tilde{w}}_i(l)(-1)^m - \ddot{\tilde{w}}_i(0) \right\} \\
& - \frac{EI}{4} D_i \left(\frac{\pi\pi}{l}\right)^3 \left\{ \tilde{w}_i(l)(-1)^m - \tilde{w}_i(0) \right\} - \left(\frac{\pi\pi}{l}\right) EI \left\{ \ddot{\tilde{w}}_i(l)(-1)^m - \ddot{\tilde{w}}_i(0) \right\} + \frac{GJ}{4a^2}(-1)^i S_i \left(\frac{\pi\pi}{l}\right) w_{ni}^{(4)} \\
& + \left(\frac{\pi\pi}{l}\right)^3 EI \left\{ \tilde{w}_i(l)(-1)^m - \tilde{w}_i(0) \right\} + \frac{GJ}{4a^2}(-1)^i S_i \left(\frac{\pi\pi}{l}\right) \left\{ w_n(l)(-1)^m - w_n(0) \right\} \\
& - \frac{GJ}{4a^2} \left(\frac{\pi\pi}{l}\right) S_i \left\{ w_0(l)(-1)^m - w_0(0) \right\} - \frac{GJ}{4a^2} S_i \left(\frac{\pi\pi}{l}\right)^3 w_{0m}(x) + \frac{GJ}{4a^2} D_i \left(\frac{\pi\pi}{l}\right) \left\{ \tilde{w}_i(l)(-1)^m - \tilde{w}_i(0) \right\} \\
& - \frac{K}{8} S_i(-1)^i w_{nm}(x) + \frac{K}{8} S_i w_{0m}(x) \quad (5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore S_i &= \sin \frac{i\pi}{n} & D_i &= 2(1 - \cos \frac{i\pi}{n}) & w_{im}(x) &= \int_0^l \tilde{w}_i \sin \frac{\pi\pi}{l} x dx \\
w_{0m}(x) &= \int_0^l w_0 \sin \frac{\pi\pi}{l} x dx & w_{nm}(x) &= \int_0^l w_n \sin \frac{\pi\pi}{l} x dx
\end{aligned}$$

3. 相対する両端単純支持、一端自由、他端固定の棒構造物の解析

今、例として頂部でスパン方向に一方向は固定、他方向自由でありスパン垂直方向には単純支持された場合を考える。ここでスパンを \$l\$、棒要素数を \$n\$ とし、自由端 \$E_n = 0\$ とする、また荷重は \$x=0\$ なる自由端にかかるものとする、\$W_0(x) = W_n(x) = 0, \ddot{W}_0(x) = \ddot{W}_n(x) = 0, \ddot{W}_r(0) = W_r(l) = 0\$、よってこれらの諸条件を(5)式に代入し、整理すると

$$\begin{aligned}
\therefore w_{im}(x) &= \left[\frac{(-1)^m \pi EI}{4l} (D_i - 4) \cdot n \ddot{\tilde{w}}_i(l) + \frac{\pi^2 EI (4 - D_i)}{4l^3} \left\{ m^3 + \left(\frac{GJ D_i l^2}{2EI \pi^2 a^2 (4 - D_i)} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{GJ D_i l^2}{2EI \pi^2 a^2 (4 - D_i)} \right) m \right\} \tilde{w}_i(0) \right] \Bigg/ \left[\frac{-EI \pi^4 (4 - D_i)}{4l^2} \left\{ m^4 + \frac{GJ l^2 D_i}{EI a^2 \pi^2 (4 - D_i)} m^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{K l^4}{EI \pi^4} \frac{4}{(4 - D_i)} \frac{(6 - D_i)}{6} \right\} \right] \quad \text{----- (6)}
\end{aligned}$$

よって(6)式をフーリエ変換することにより下の如く整理できる

$$\therefore \tilde{w}_{im}(x) = \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} w_{im}(x) \cdot \sin \frac{\pi\pi}{l} x = \frac{-l^2}{2\pi^2 \alpha^3} P(1-\xi) \ddot{\tilde{w}}_i(l) + \frac{l^2 - \beta^2}{2\alpha^3} P(\xi) \ddot{\tilde{w}}_i(0) + Q(\xi) \tilde{w}_{i0} \quad \text{--- (7)}$$

$$P(\xi) = \sum \frac{2}{\pi} \frac{2\alpha\beta \cdot m}{(m^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2} \sin \pi\pi\xi = \frac{\sinh \alpha l \pi (2-\xi) \cdot \sin \beta l \pi \xi - \sinh \beta l \pi \xi \cdot \sin \alpha l \pi (2-\xi)}{\cosh 2\alpha l \pi - \cos 2\beta l \pi}$$

$$Q(\xi) = \sum \frac{2}{\pi} \frac{m(m^2 + \alpha^2 - \beta^2)}{(m^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2} \sin \pi\pi\xi = \frac{\cosh \alpha l \pi (2-\xi) \cdot \cos \beta l \pi \xi - \cosh \beta l \pi \xi \cdot \cos \alpha l \pi (2-\xi)}{\cosh 2\alpha l \pi - \cos 2\beta l \pi}$$

$$\therefore \frac{GJ l^2 D_i}{EI a^2 \pi^4 (4 - D_i)} = A \quad \frac{K l^4}{EI \pi^4} \frac{4}{(4 - D_i)} \frac{(6 - D_i)}{6} = B \quad \therefore \alpha = \frac{\sqrt{A+2C}}{2} \quad \beta = \frac{\sqrt{2C-A}}{2}$$

また \$\xi = x/l\$ である。

$$C = \sqrt{B}$$

次に剪断力のつり合い条件より

$$Q_{r,r-1} - Q_{r,r+1} + P_r = 0$$

$$\therefore \frac{EI}{4} (\Delta^2 \ddot{w}_{r-1} + 4 \ddot{w}_r) + \frac{GJ}{4a^2} (\Delta^2 \dot{w}_{r-1}) - P_r = 0$$

上式を定積分変換すると

$$\therefore \frac{EI}{4} (4 - D_i) \cdot \ddot{\tilde{w}}_i(0) - \frac{GJ}{4a^2} D_i \cdot \dot{\tilde{w}}_i(0) = \tilde{P}_i \quad \text{----- (8)}$$

$$\tilde{P}_i = \sum_{r=1}^N P_r \cdot \sin \frac{i\pi}{N} r$$

また(7)式と境界条件 $\tilde{w}_i(0) = 0$ より

$$\therefore \frac{-l^2}{2\pi^2 \alpha \beta} P'(0) \cdot \tilde{w}_i(l) + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha \beta} P'(1) \cdot \tilde{w}_i(0) + Q'(1) \cdot \tilde{w}_i(0) = 0 \quad \text{----- (9)}$$

よって(8), (9)式に(10)式を代入し連立方程式として解くと

$$\therefore \tilde{w}_i(0) = \frac{\frac{-l^2}{2\pi^2 \alpha \beta} P'(0) \cdot \tilde{P}_i}{\left\{ \frac{-l^2}{2\pi^2 \alpha \beta} P'(0) \right\} \cdot \left\{ \frac{EI}{4} (4 - D_i) D - \frac{GJ}{4a^2} D_i \cdot F \right\} - \left\{ \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha \beta} P'(1) + Q'(1) \right\} \left\{ \frac{EI}{4} (4 - D_i) D - \frac{GJ}{4a^2} D_i F \right\}} \quad \text{----- (10)}$$

$$\therefore \tilde{w}_i(l) = \frac{\left\{ \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha \beta} P'(1) + Q'(1) \right\} \tilde{P}_i}{\left\{ \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha \beta} P'(1) + Q'(1) \right\} \left\{ \frac{EI}{4} (4 - D_i) D - \frac{GJ}{4a^2} D_i F \right\} - \frac{-l^2}{2\pi^2 \alpha \beta} P'(0) \left\{ \frac{EI}{4} (4 - D_i) D - \frac{GJ}{4a^2} D_i F \right\}} \quad \text{----- (11)}$$

そこで

$$C = \frac{1}{2\pi^2 \alpha \beta l} [\alpha^2 \pi^2 P'(1) - 2\alpha \beta \pi^2 Q'(1) - \beta^2 \pi^2 P(1)]$$

$$D = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha \beta} [\alpha^2 \pi^2 P(0) - 2\alpha \beta \pi^2 Q'(0) - \beta^2 \pi^2 P(0)] / l^2 + [2\alpha \beta \pi^2 P(0) + (\alpha^2 - \beta^2) \pi^2 Q'(0)] / l^2$$

$$E = \frac{-1}{2\pi^2 \alpha \beta} P'(1)$$

$$F = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha \beta l} P'(0) + Q'(0) / l$$

よって(7), (10), (11) 式の各々により $\tilde{w}_{im}(x)$ を求めることができる。さらに定積分変換の逆変換公式により、たがみ $w_r(x)$ を求めることができる。

$$\therefore w_r(x) = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N-1} \tilde{w}_i(x) \cdot \sin \frac{i\pi}{N} r \quad \text{----- (1)}$$

4. 数値計算例

例として今、 $N=10$, $l=100\text{ cm}$, $a=2\text{ cm}$, $I_2=1.0\text{ kg/cm}^2$, $E=2.1 \times 10^6\text{ kg/cm}^2$, $G=8.1 \times 10^5\text{ kg/cm}^2$ のものについて $P=1\text{ kg}$ を節点4~5の中間に作用させた場合の結果を図-2, 3に示す。図-2は等たがみ曲線を示し、図-3は曲げモーメント図の一部を示す。

以上、スパン方向のヒューズで結合された棒状要素による面構造の応力について、解析を行ったが、円筒形パイプを面線的に結合させた基礎構造物等の応力計算も、この様な方法でもって解析することができる。

図-2. 等たわみ曲線

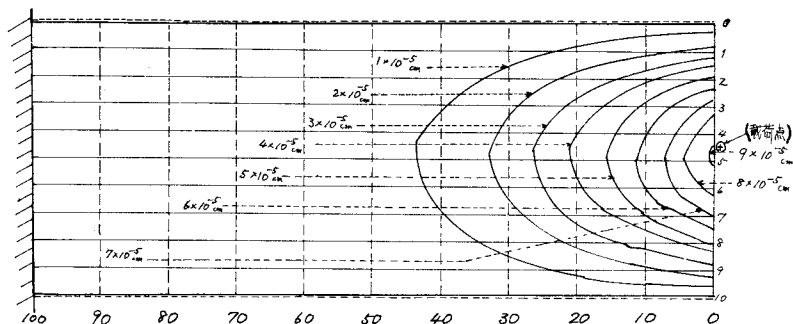
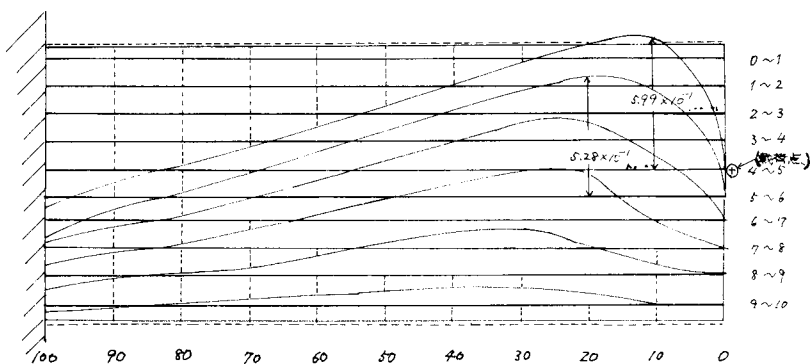


図-3. 曲げモーメント図



[参考文献]

S. G. Nomachi : A Note on Finite Fourier Transforms Concerning Finite Integration

(The Transcript from the Memoirs of the Muroran Institute of Technology Vol. 5, No. 2)