

室蘭工業大学 正 員 能町純雄
正 員 松岡健一
学生員 ○堀米昇士朗

1 まえがき

著者等は、先に、平板問題を帯板要素に分割する方法で、応力計算を行うための一方向連立差分方程式を設定し、これが、正確度の高い一種の有限要素法であることを示したが、ここでは、2本の基本的なつり合式、即ち、モーメントと剪断力の式を、より一般的に示し、これを、四辺単純支持板、2辺単純支持で2辺自由の平板、及び、半無限カンテラバー板に適用し、帯板要素の分割数の増大による精度を調べたものである。

2 帯板要素の解式

平板において、右図の様に座標軸 x, y を取り、 y 方向に n 枚の帯板要素に分割する。 $\lambda \ll n\lambda$ として、平板の基本微分方程式に、指数型フーリエ変換 $w = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{w}_m e^{-imx} dm$ を適用し、今、考えている帯板上に、荷重が無いとして基本微分方程式を解く。

$$m^4 \bar{w}_m - 2m^2 \frac{d^2 \bar{w}_m}{dy^2} + \frac{d^4 \bar{w}_m}{dy^4} = 0 \quad (1)$$

各項に $\sin \frac{n\pi}{\lambda} y$ をかけて、部分積分し、 $\int_0^\lambda \bar{w}_m \sin \frac{n\pi}{\lambda} y dy = S_n[\bar{w}_m]$ と置き、 $S_n[\bar{w}_m]$ について整理する。

次に $\bar{w}_m = \sum_{n=1}^{\infty} S_n[\bar{w}_m] \sin \frac{n\pi}{\lambda} y$ と逆変換し、ベルヌーイの多項式に展開して、微小項を無視すると、

$$w = \bar{w}_0 f^{(0)}(\eta) + \bar{w}_1 f^{(1)}(\eta) + \frac{M_0^* \lambda^2}{N} f^{(2)}(\eta) + \frac{M_1^* \lambda^2}{N} f^{(3)}(\eta) \quad (2)$$

$$\Delta w = \left\{ -\frac{M_0^*}{N} + \bar{w}_0 \right\} f^{(0)}(\eta) + \left\{ -\frac{M_1^*}{N} + \bar{w}_1 \right\} f^{(1)}(\eta) + \left\{ -\frac{\ddot{M}_0^* \lambda^2}{N} + \bar{w}_0 \lambda^2 \right\} f^{(2)}(\eta) + \left\{ -\frac{\ddot{M}_1^* \lambda^2}{N} + \bar{w}_1 \lambda^2 \right\} f^{(3)}(\eta) \quad (3)$$

(2)式から 帯板の境界点の撓角 ϕ を求めると、

$$\left. \begin{aligned} \phi_{r,r+1} &= \frac{\bar{w}_{r+1} - \bar{w}_r}{\lambda} + \frac{2M_r^* \lambda}{6N} + \frac{M_{r+1}^* \lambda}{6N} \\ \phi_{r,r-1} &= \frac{\bar{w}_r - \bar{w}_{r-1}}{\lambda} - \frac{M_{r-1}^* \lambda}{6N} - \frac{2M_r^* \lambda}{6N} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

又、剪断力を Q とすれば 帯板の境界点では、

$$\left. \begin{aligned} Q_{r,r+1} &= \frac{M_{r+1}^* - M_r^*}{\lambda} - \frac{N(\bar{w}_{r+1} - \bar{w}_r)}{\lambda} + \frac{2\lambda(\ddot{M}_r^* - N\bar{w}_r)}{6} + \frac{\lambda(\ddot{M}_{r+1}^* - N\bar{w}_{r+1})}{6} \\ Q_{r,r-1} &= \frac{M_r^* - M_{r-1}^*}{\lambda} - \frac{N(\bar{w}_r - \bar{w}_{r-1})}{\lambda} - \frac{\lambda(\ddot{M}_{r-1}^* - N\bar{w}_{r-1})}{6} - \frac{2\lambda(\ddot{M}_r^* - N\bar{w}_r)}{6} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

(以上、詳しくは才24回年次学術講演会講演集参照の事)

3 つり合条件式 及び $\bar{w}_r$ と M_r^* のフーリエ変換

帯板の境界点で 撓角が連続していることを考慮すれば (4)式から

$$\frac{\bar{w}_{r+1} - 2\bar{w}_r + \bar{w}_{r-1}}{\lambda} + \frac{\lambda}{6N}(M_{r+1}^* + 4M_r^* + M_{r-1}^*) = 0 \quad (6)$$

荷重は r 点に作用するものとし、 P_r であらわせば 帯板の r 点において 剪断力は等しいから

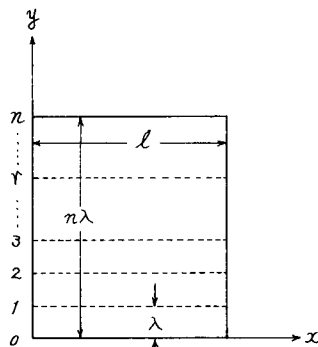


図-1

$$\frac{M_{r-1}^* - 2M_r^* + M_{r+1}^*}{\lambda} - \frac{N}{\lambda} (\ddot{w}_{r-1} - 2\ddot{w}_r + \ddot{w}_{r+1}) + \frac{\lambda}{6} (\ddot{M}_{r-1}^* + 4\ddot{M}_r^* + \ddot{M}_{r+1}^*) - \frac{\lambda N}{6} (\ddot{w}_{r-1} + 4\ddot{w}_r + \ddot{w}_{r+1})$$

$$= -P_r \quad (7)$$

(6), (7)式を $x=0$, $x=l$ で単純支持として, それぞれ x 方向にフーリエ変換, y 方向にフーリエ変換と分変換し, $S_2[\bar{w}_{r,d}]$, $S_2[\bar{M}_{r,d}^*]$ について解くと

$$S_2[\bar{w}_{r,d}] = - \left\{ \frac{(-1)^i}{(D_2 + \gamma)^2} \sin \frac{i\pi}{n} \right\} \left\{ \frac{\bar{M}_n^* + N\bar{w}_n (2\alpha^2 - \frac{\lambda^2 \alpha^4}{6}) - (\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{6}) \lambda \cdot \bar{P}_{r,d}}{N(\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda \alpha^2}{6})^2} - \gamma \cdot \bar{w}_n \right\} + \left\{ \frac{1}{(D_2 + \gamma)^2} \sin \frac{i\pi}{n} \right\}$$

$$\times \left\{ \frac{\bar{M}_0^* + N\bar{w}_0 (2\alpha^2 - \frac{\lambda^2 \alpha^4}{6}) - (\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{6}) \lambda \cdot \bar{P}_{r,d}}{N(\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda \alpha^2}{6})^2} - \gamma \bar{w}_0 \right\} + \left\{ \frac{(-1)^i}{D_2 + \gamma} \sin \frac{i\pi}{n} \right\} \left\{ \frac{\lambda \cdot \bar{P}_{r,d}}{\gamma^2 N(\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda \alpha^2}{6})^2} \right.$$

$$- \bar{w}_n \left. \right\} - \left\{ \frac{1}{D_2 + \gamma} \sin \frac{i\pi}{n} \right\} \left\{ \frac{\lambda \cdot \bar{P}_{r,d}}{\gamma^2 N(\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda \alpha^2}{6})^2} - \bar{w}_0 \right\} - \left\{ \frac{(-1)^i}{D_2} \sin \frac{i\pi}{n} \right\} \left\{ \frac{\lambda \cdot \bar{P}_{r,d}}{\gamma^2 N(\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda \alpha^2}{6})^2} \right.$$

$$\left. + \left\{ \frac{1}{D_2} \sin \frac{i\pi}{n} \right\} \left\{ \frac{\lambda \cdot \bar{P}_{r,d}}{\gamma^2 N(\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda \alpha^2}{6})^2} \right\} \right\} \quad (8)$$

$$S_2[\bar{M}_{r,d}^*] = \left\{ \frac{(-1)^i}{(D_2 + \gamma)^2} \sin \frac{i\pi}{n} \right\} \left\{ \gamma \cdot \bar{M}_n^* + \frac{\lambda^2 \alpha^4 \bar{M}_n^* + 6N\alpha^4 \bar{w}_n}{6(\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda \alpha^2}{6})^2} - \frac{\bar{P}_{r,d}}{\lambda(\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda \alpha^2}{6})^2} \right\} - \left\{ \frac{1}{(D_2 + \gamma)^2} \sin \frac{i\pi}{n} \right\}$$

$$\times \left\{ \gamma \cdot \bar{M}_0^* + \frac{\lambda^2 \alpha^4 \bar{M}_0^* + 6N\alpha^4 \bar{w}_0}{6(\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda \alpha^2}{6})^2} - \frac{\bar{P}_{r,d}}{\lambda(\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda \alpha^2}{6})^2} \right\} - \bar{M}_n^* \left\{ \frac{(-1)^i}{D_2 + \gamma} \sin \frac{i\pi}{n} \right\}$$

$$+ \bar{M}_0^* \left\{ \frac{1}{D_2 + \gamma} \sin \frac{i\pi}{n} \right\} \quad (9)$$

$$\text{ここで } \alpha = \frac{m\pi}{l}, \quad \gamma = \frac{\alpha^2(2 - \frac{\lambda^2 \alpha^4}{6})}{2(\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda \alpha^2}{6})^2}, \quad D_2 = 2(1 - \cos \frac{i\pi}{n})$$

次に, $S_2[\bar{w}_{r,d}]$, $S_2[\bar{M}_{r,d}^*]$ を逆変換し, $\bar{w}_{r,d}$ と $\bar{M}_{r,d}^*$ を求め, 更に x 方向にフーリエ逆変換すると, w_r , M_r^* が求まる。

$$w_r = \frac{2}{n} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n-1} S_2[\bar{w}_{r,d}] \cdot \sin \frac{i\pi}{n} y \cdot \sin \frac{m\pi}{l} x$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{\bar{M}_n^* + N\bar{w}_n (2\alpha^2 - \frac{\lambda^2 \alpha^4}{6}) - (\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{6}) \lambda \cdot \bar{P}_{r,d}}{N(\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda \alpha^2}{6})^2} - \gamma \cdot \bar{w}_n \right] \times \Phi_{1-4}(r) + \left[\frac{\bar{M}_0^* + N\bar{w}_0 (2\alpha^2 - \frac{\lambda^2 \alpha^4}{6}) - (\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{6}) \lambda \cdot \bar{P}_{r,d}}{N(\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda \alpha^2}{6})^2} - \gamma \bar{w}_0 \right] \times \Phi_{1-4}(r-n) \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\lambda \cdot \bar{P}_{r,d}}{\gamma^2 N(\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda \alpha^2}{6})^2} - \bar{w}_n \right] \times \Psi_{1-4}(r) + \left[\frac{\lambda \cdot \bar{P}_{r,d}}{\gamma^2 N(\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda \alpha^2}{6})^2} - \bar{w}_0 \right] \times \Psi_{1-4}(r-n) \right\} \left[\delta_{1,2}(r-n) - \delta_{1,2}(r) \right] \cdot \sin \frac{m\pi}{l} x$$

------(10)

$$M_r^* = \frac{2}{n} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n-1} S_2[\bar{M}_{r,d}^*] \cdot \sin \frac{i\pi}{n} y \cdot \sin \frac{m\pi}{l} x$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[\gamma \cdot \bar{M}_n^* + \frac{\lambda^2 \alpha^4 \bar{M}_n^* + 6N\alpha^4 \bar{w}_n}{6(\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda \alpha^2}{6})^2} - \frac{\bar{P}_{r,d}}{\lambda(\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda \alpha^2}{6})^2} \right] \times \Phi_{1-4}(r) - \left[\gamma \cdot \bar{M}_0^* + \frac{\lambda^2 \alpha^4 \bar{M}_0^* + 6N\alpha^4 \bar{w}_0}{6(\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda \alpha^2}{6})^2} - \frac{\bar{P}_{r,d}}{\lambda(\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda \alpha^2}{6})^2} \right] \times \Phi_{1-4}(r-n) \right.$$

$$-\frac{\bar{P}_{r,0}}{\lambda(\frac{1}{\lambda}-\frac{\lambda d^2}{\delta^2})^2}\left\{\bar{\Phi}_{1,n}(r-n)-\bar{M}_n^*\bar{\Psi}_{1,n}(r)+\bar{M}_0^*\bar{\Psi}_{1,n}(r-n)\right\}\sin\frac{\pi}{\ell}x \quad (11)$$

ここで $\bar{\Phi}_{1,n}(r)$, $\bar{\Psi}_{1,n}(r)$, $\bar{\delta}_{1,2}(r)$ は次の如くである。

$$\begin{aligned} \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i\sin\frac{i\pi}{n}\sin\frac{i\pi r}{n}}{D_i+\zeta} &= \begin{Bmatrix} \bar{\Psi}_1(r) \\ \bar{\Psi}_4(r) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ (-1)^{n-r} \end{Bmatrix} \cdot \frac{\cosh\beta(n-r)-\cosh\beta(n+r)}{\cosh 2\beta n-1}, \quad \begin{cases} \zeta \geq 0 \\ \zeta \leq -4 \end{cases} \\ &= \begin{Bmatrix} \bar{\Psi}_2(r) \\ \bar{\Psi}_3(r) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ (-1)^{n-r} \end{Bmatrix} \cdot \frac{\cos\beta(n-r)-\cos\beta(n+r)}{\cos 2\beta n-1}, \quad \begin{cases} 0 > \zeta \geq -2 \\ -2 > \zeta > -4 \end{cases} \\ \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i\sin\frac{i\pi}{n}\sin\frac{i\pi r}{n}}{(D_i+\zeta)^2} &= \begin{Bmatrix} \bar{\Phi}_1(r) \\ \bar{\Phi}_4(r) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ (-1)^{n-r} \end{Bmatrix} \cdot \frac{(n+r)\sinh\beta(n-r)-(n-r)\sinh\beta(n+r)}{\sqrt{\zeta(4+\zeta)}(\cosh 2\beta n-1)}, \quad \begin{cases} \zeta \geq 0 \\ \zeta \leq -4 \end{cases} \\ &= \begin{Bmatrix} \bar{\Phi}_2(r) \\ \bar{\Phi}_3(r) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ (-1)^{n-r} \end{Bmatrix} \cdot \frac{(n+r)\sin\beta(n-r)-(n-r)\sin\beta(n+r)}{\sqrt{\zeta(4+\zeta)}(\cos 2\beta n-1)}, \quad \begin{cases} 0 > \zeta \geq -2 \\ -2 > \zeta > -4 \end{cases} \\ \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i\sin\frac{i\pi}{n}\sin\frac{i\pi r}{n}}{D_i} &= \begin{Bmatrix} \bar{\delta}_1(r) \\ \bar{\delta}_2(r) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ (-1)^{n-r} \end{Bmatrix} \cdot \begin{cases} \frac{r}{n}, & \zeta \geq -2 \\ \frac{r}{n}, & \zeta < -2 \end{cases} \\ &\text{但し, } \beta = \log \left| 1 + \frac{\zeta}{2} + \sqrt{(1+\frac{\zeta}{2})^2 - 1} \right|, \quad \zeta \geq 0 \text{ or } \zeta \leq -4 \\ &\beta = \tan^{-1} \left| \frac{\sqrt{1-(1+\frac{\zeta}{2})^2}}{1+\frac{\zeta}{2}} \right|, \quad -4 < \zeta < 0 \end{aligned}$$

又, モーメント M_x, M_y は

$$\left. \begin{aligned} M_y &= -N \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) = M_{1r}^* - N\nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \\ M_x &= -N \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = \nu M_{1r}^* - N \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

4 境界条件

(i) 固定端の場合

$$\bar{Q}_{n,n-1} = 0, \quad \bar{W}_n = 0$$

(ii) 自由端の場合

$$M_0^* - N\nu \bar{W}_0 = 0, \quad R_0 + \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right)_0 = Q_{0,1}$$

(iii) 単純支持の場合

$$\bar{W}_0 = \bar{W}_n = M_0^* = M_n^* = 0$$

5 数値計算例 室蘭工大電子計算機室 FACOM231 で計算した。

(i) Deflection and Moment ($x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$)

in Point Loaded Simply Supported Square Plate 図-2

(ii) Moments (M_x , at $x = \frac{a}{2}$, $y = 0$ or b) and Deflections (at $x = \frac{a}{2}$, $y = 0$ or b) in Sin Loaded Rectangular Plates with the Edges

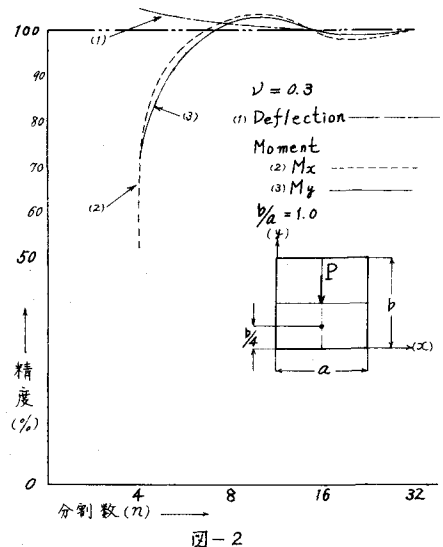


図-2

$x=0, x=a$ Simply Supported and the Other Two Free, 図-3, 図-4

$$\nu = 0.3$$

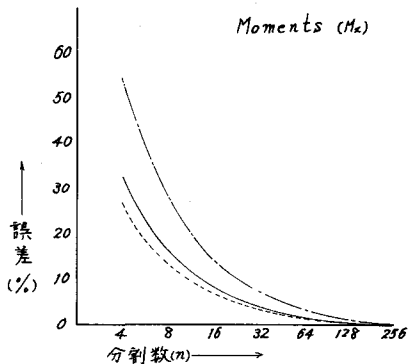


図-3

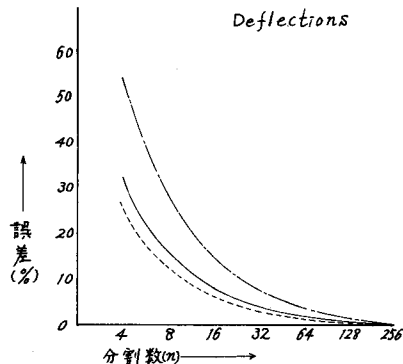
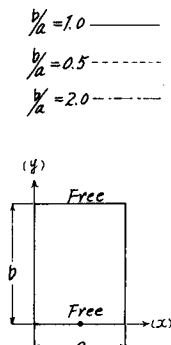
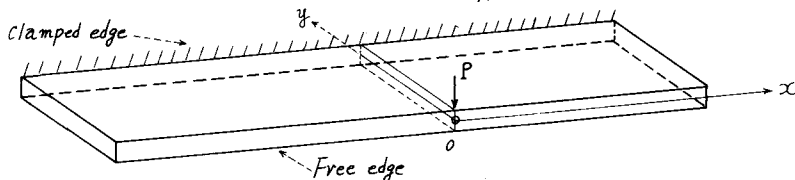


図-4

(iii) Deflection and Moment in Point Loaded Semi-infinite Cantilever Plate 図-5, 図-6



The distribution of bending moment along the clamped edge and deflection along the free

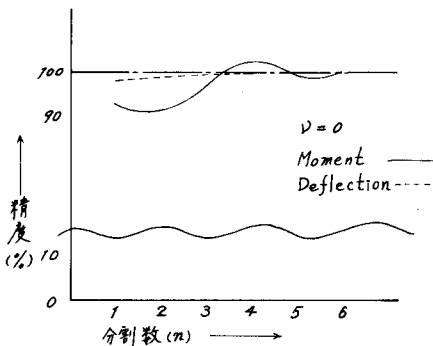


図-5

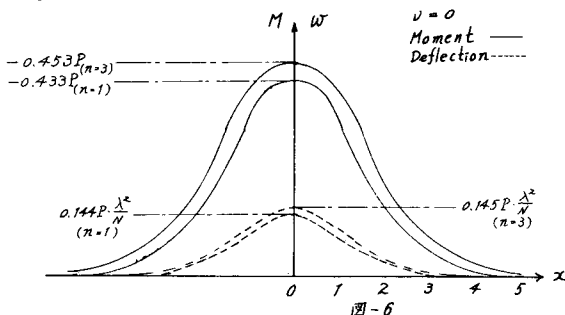


図-6

6 結び

- (i) $n\lambda = b$ において、 $n \rightarrow \infty$ にすれば、(10), (11)式は TIMOSHENKO の正確解に一致する。
- (ii) この解析法は、 x, y 方向に渡る偏有限差方程式の場合にも応用できるので、いわゆる有限要素法について、等要素を用いて分割無限の極限を求め、いかなる形になるかを check できる見込みがある。

参考文献

- S.G. Nomachi : On Finite Fourier Sine Series with Respect to Finite Differences
 " : A Note on Finite Fourier Transform Concerning Finite Integration
 Timoshenko, Krieger : Theory of Plates and Shells
 Karl Girkman : Flächentragwerke