

I-97 一辺が壁で支持されたフラットスラブの解法

金沢大学工学部 正会員 小野一良

フラットスラブに一樣な分布荷重が作用した場合またはすべての柱から一樣なモーメントを受けた場合にフラットスラブに生ずるたわみ、曲げモーメントその他を解くためにはフラットスラブの周辺部より十分に離れたすべての支間において各のスラブは等しい変形を生ずると仮定する場合が多い。しかしフラットスラブの周辺部に近い所ではこの仮定が適用できない。フラットスラブの支間数が少ない場合に関しては周辺部の影響を考慮に入れた厳密解が発表されている⁽¹⁾⁽²⁾。この方法を拡張すれば支間数が増加した場合にも適用できるはずであるが、精度を下げないためには支間数に比例して多数の未知数を含む連立方程式を解くことを要し、実際上は少数の支間数に限られるであろう。

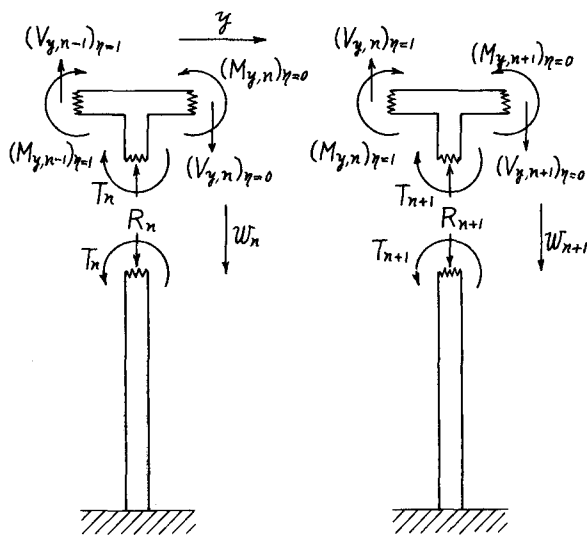
同一の構造部分および同一の支持条件が繰返された構造物すなわち連続ばり、連続ラーメンまたは連続アーチにおいてはその縁端部に受けた荷重または支持状態による影響が縁端からの支間数が増すとともに等比級数的に減少することが知られている。フラットスラブにおいても同様な法則が適用されるのであれば支間数に関係なく、任意の境界条件のもとにフラットスラブのたわみまたは曲げモーメントが高い精度で計算できることになるのでここに検討を加えることにした。

フラットスラブの縁端線上に x 軸をとり、これと直角方向に y 軸をとる。フラットスラブは y の正の方向に無限に延びていると仮定する。柱の中心を $(2ma, 2na)$ なる座標であらわす。ここに m は0または正負の整数とし、 n は正の整数とする。 $2a$ および $2na$ はそれぞれ x 軸方向および y 軸方向の支間とする。 $y=2na$ の位置にある柱からスラブが受ける反力を R_n とし、モーメントを T_n とし、これらの正の方向を図一に示す。柱の半径を Δ とすれば一般に R_n および T_n は次式で示すごとく柱とスラブとの結合部において $\pi\Delta^2$ なる面積内に分布する荷重として取扱うことができる。

$$p_n = R_n f(r) \quad (1)$$

$$q_n = T_n g(r) \sin \theta \quad (2)$$

上式における r, θ は柱の中心を原点とし、 x 軸の方向を $\theta=0$ とした極座標とする。しかしこの分布の形状に関してはほとんど知られておらず、また R_n および T_n をどのような形状の分布荷重としても柱から相当離れた所では分布形状の影響が非常に少なくなることが証明されている。これから後の計算においてはまず R_n および T_n を柱の中心点においてスラブに作用する集中荷重またはモーメントと仮定してスラブのたわみを求め、この解に R_n および T_n の分布形状の影響を追加して柱の近傍におけるスラブのたわみ角また



図一

はスラブに生ずる曲げモーメントの計算をなす。

フラットスラブの縁端に受けた荷重または縁端部の支持状態による影響だけについて論ずる場合には $n=1, 2, 3, \dots$ に対して R_n および T_n を次式によってあらわすことができる。

$$R_n = P \lambda^n \quad (3), \quad T_n = \mu a P \lambda^n \quad (4)$$

スラブの縁端から離れるに従って縁端の影響が次第に小さくなることを考慮すれば λ の絶対値は 1 より小さくなることが要求される。

フラットスラブが縁端部を除いて全然外力を受けない場合には

$$2n\pi a \leq y \leq 2(n+1)\pi a \quad \text{ただし } n=0, 1, 2, \dots$$

のとき

$$\frac{x}{2a} = \xi, \quad \frac{y - 2n\pi a}{2a} = \eta \quad (5)$$

と置けばスラブのたわみは次式によってあらわすことができる。

$$w_n = -\frac{a^2}{D} P \lambda^n \left\{ A_0 + B_0 \xi \eta + C_0 (\xi \eta)^2 + D_0 (\xi \eta)^3 + \sum_{m=1}^{\infty} \cos 2m\pi \xi \left\{ (A_m + B_m 2m\pi \xi \eta) \exp(-2m\pi \eta) + (C_m + D_m 2m\pi \xi \eta) \exp(2m\pi \xi \eta) \right\} \right\} \quad (6)$$

上式における D は板の剛度であり、 $A_0, B_0, C_0, D_0, A_m, B_m, C_m, D_m$ は積分定数であるが、すべての支間において同一の値を採ると仮定する。 R_n および T_n を周期 $2a$ のフーリエ級数を用いて展開し、 $y = 2n\pi a$ の線上に分布して作用する反力 $\bar{V}_n$ および $\bar{M}_n$ としてあらわせば

$$\bar{V}_n = \frac{P}{a} \lambda^n \left(-\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \cos 2m\pi \xi \right) \quad (7)$$

$$\bar{M}_n = \mu P \lambda^n \left(-\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \cos 2m\pi \xi \right) \quad (8)$$

$n=1, 2, 3, \dots$ とするとき $y = 2n\pi a$ となる直線上において w_{n-1} と w_n とが接続する条件から次式が導かれる。

$$(w_{n-1})_{\eta=1} = (w_n)_{\eta=0} \quad (9) \quad \left(\frac{\partial w_{n-1}}{\partial y} \right)_{\eta=1} = \left(\frac{\partial w_n}{\partial y} \right)_{\eta=0} \quad (10)$$

$$-D \left(\frac{\partial^2 w_{n-1}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_{n-1}}{\partial x^2} \right)_{\eta=1} = -D \left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} \right)_{\eta=0} - \bar{M}_n \quad (11)$$

$$-D \left\{ \frac{\partial^3 w_{n-1}}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w_{n-1}}{\partial x^2 \partial y} \right\}_{\eta=1} = -D \left\{ \frac{\partial^3 w_n}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w_n}{\partial x^2 \partial y} \right\}_{\eta=0} - \bar{V}_n \quad (12)$$

上記の4式に(6),(7),(8)式を代入し、かつ左右両辺の常数項および $\cos 2m\pi \xi$ の係数をそれぞれ等しいと置けば $A_0, B_0, C_0, D_0, A_m, B_m, C_m, D_m$ を λ, μ の関数としてあらわすことができる。

すべての柱の中心においてスラブのたわみは0となるので次式の成立することが要求される。

$$A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m + C_m) = 0 \quad (13)$$

これは λ と μ の間の関係を示すオ1の式となる。つぎに $y = 2n\pi a$ なる線上におけるスラブのたわみ角を計算するため(6)式を y で微分してから $\eta=0$ と置けば次式が得られる。

$$\left(\frac{\partial w_n}{\partial y} \right)_{\eta=0} = \frac{a}{D} P \lambda^n \left\{ \frac{1}{2} B_0 + \sum_{m=1}^{\infty} m\pi \cos 2m\pi \xi (-A_m + B_m + C_m + D_m) \right\} \quad (14)$$

柱の近傍においては上式に次の補正項を加える要がある。

$$-\frac{T_n}{8\pi D} \frac{\beta_1 \Delta^2}{2x^2} \quad \text{ただし } x \geq a \quad (15)$$

ここに β_1 は (2) 式における $g(x)$ の形によって定まる係数である。柱の上部すなわち半径 Δ の円内においてスラブには全然変形を生じないと仮定すれば上式における β_1 は 2 となり、柱の上部におけるスラブの傾斜角 θ_n は (14), (15) 式における x を Δ において計算される。この結果は

$$\tan \theta_n = \frac{a}{D} P \lambda^n \left\{ \frac{1}{2} B_0 + \sum_{m=1}^{\infty} m \pi \cos \frac{m \pi \Delta}{a} (-A_m + B_m + C_m + D_m) \right\} - \frac{T_n}{8 \pi D} \quad (16)$$

ただし θ_n の正の方向はスラブに作用する T_n と同方向とする。

フラットスラブを支える柱がその下端において完全に固定されているとき柱の上端に作用するモーメント T_n によって柱の上端に生ずる傾斜角 φ_n は次式によって計算される。

$$\tan \varphi_n = \frac{h}{\pi E \Delta^4} T_n \quad (17)$$

ここに h は柱の長さとし、 E は柱を作る材料の弾性係数とする。

柱の上部においてスラブの傾斜角と柱の傾斜角とは一致することを要し、 θ_n の正の方向と φ_n の正の方向とは逆であることに注意すれば

$$\tan \varphi_n = -\tan \theta_n \quad (18)$$

これは λ と μ との間の関係を示す第 2 の式となる。 $|\lambda|$ が 1 より小さいことを考慮して (13) 式と (18) 式とより λ , μ を計算すれば一般に λ として 1 個の実数根と無限に多数の複素根とが得られる。これらの根を絶対値の大きいものより順に $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_{-1}, \lambda_2, \lambda_{-2}, \dots$ と置く、ただし λ_0 は実数とし、 λ_i と λ_{-i} とは共役複素数とする。これらの λ に対する μ の値を $\mu_0, \mu_1, \mu_{-1}, \mu_2, \mu_{-2}, \dots$ とする。

このように λ として多数の値が得られたため (6) 式は次のような一般的な形であらわす必要がある。

$$w_n = \frac{a^2}{D} \sum_{i=0}^{\infty} P_i \lambda_i^n \left\{ A_{0,i} + B_{0,i} x \eta + C_{0,i} (x \eta)^2 + D_{0,i} (x \eta)^3 + \sum_{m=1}^{\infty} \cos 2m \pi \xi \left\{ (A_{m,i} + B_{m,i} 2m \pi x \eta) \exp(-2m \pi x \eta) + (C_{m,i} + D_{m,i} 2m \pi x \eta) \exp(2m \pi x \eta) \right\} \right\} \quad (19)$$

上式における P_i は境界条件によって決定される定数である。1 例として 1 辺が壁で支持されたフラットスラブに一樣な分布荷重が作用している場合についてスラブのたわみその他を解くこととする。広さ無限のフラットスラブが一樣な分布荷重 p を受けた場合のたわみは次式によって示される。³⁾

$$w^* = \frac{P^* S}{8 \pi^2 D} \left\{ \frac{1}{3} \pi^2 \eta^2 (1-\eta)^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 - \cos 2m \pi \xi \{ (1-\eta) \cosh 2m \pi x \eta + \eta \cosh 2m \pi x (1-\eta) \}}{m^2 (\cosh 2m \pi x - 1)} \right. \\ \left. + \frac{1}{2 \pi x} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sinh 2m \pi x - \cos 2m \pi \xi \{ \sinh 2m \pi x \eta + \sinh 2m \pi x (1-\eta) \}}{m^3 (\cosh 2m \pi x - 1)} \right\} \quad (20)$$

ここに $S = 4 \pi a^2$, $P^* = p S$ とする。このような荷重を受けたフラットスラブについて縁端部の条件を考慮に入れるためにはスラブのたわみを一般に $w^* + w_n$ によってあらわす必要がある。

フラットスラブの縁端においてスラブを支える壁のたわみは次式によってあらわすことができる。

$$v = E_0 + F_0 \frac{u}{2a} + G_0 \left(\frac{u}{2a} \right)^2 + H_0 \left(\frac{u}{2a} \right)^3 + \sum_{m=1}^{\infty} \cos 2m \pi \xi \left\{ (E_m + F_m \frac{m \pi u}{a}) \exp(-\frac{m \pi u}{a}) \right. \\ \left. + (G_m + H_m \frac{m \pi u}{a}) \exp(\frac{m \pi u}{a}) \right\} \quad (21)$$

壁の下端が地中に固定されており、上端はスラブに剛結されていると仮定すれば

$$u=0 \text{ のとき } v=0, \quad \frac{\partial v}{\partial u}=0, \quad u=\ell \text{ のとき } v=0$$

となることが要求される。これらの条件より E_0, F_0, H_0 は G_0 の関数としてあらわされ、 E_m, F_m, H_m は G_m の関数としてあらわすことができる。

$y=0, u=\ell$ の位置においてスラブが壁に剛結されているためには次の条件が成立することが要求される。

$$(w^*+w_0)_{\eta=0}=0 \quad (22), \quad \frac{\partial}{\partial y}(w^*+w_0)_{\eta=0}=-\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)_{u=\ell} \quad (23)$$

$$-D\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(w^*+w_0)_{\eta=0}=D'\left(\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}+\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_{u=\ell} \quad (24)$$

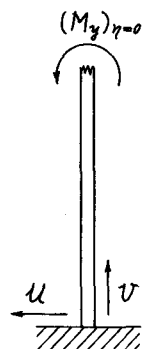


図-2

上式における D' は壁の剛度とする。(22), (23), (24) 式における w^*, w_0 および v はすべて x 軸方向に 2ℓ を基本周期とするフーリエ級数であらわされているので ℓ 次の高周波までを考慮すればこれら3式はいずれも未知数 $P_0, P_1, P_{-1}, \dots, G_0, G_1, G_2, \dots, G_\ell$ の間の関係を示す $\ell+1$ 個の条件式となる。(23)および(24)式の v には $G_0, G_1, G_2, \dots, G_\ell$ が含まれているので(23), (24)式より導かれた $2\ell+2$ 個の条件式から $G_0, G_1, G_2, \dots, G_\ell$ を消去すれば $\ell+1$ 個の条件式となり, (22)式から導かれた $\ell+1$ 個の条件式と併せて $2\ell+2$ 個の条件式が得られる。これらの式の中には未知数として P_ℓ が含まれている。 ℓ として $-\ell$ から ℓ までを考慮することにすれば未知数として $2\ell+1$ 個となり, 条件式としては $2\ell+2$ 個となるので条件式が1個余分になる。しかし w^* および w_0 は P_ℓ の値に係わらずいずれも $\xi=0, \eta=0$ において0となるように定められているので ℓ が十分大きい場合には(22)式より導かれた $\ell+1$ 個の条件式は互に独立ではなく, その中の1個は他の ℓ 個の式より導かれるはずである。このように考えれば ℓ として $-\ell$ より $+\ell$ までを考慮することによって ℓ 次の高周波までについて境界条件を満足する解が得られるはずである。

以上に解法の大要を説明したのであるが, 問題として残ることは ℓ の値を順次大きくして行ったときに $2\ell+1$ 元の連立方程式を解いて得られた P_ℓ の値がそれぞれ一定値に収束するかどうかと云うこと, また ℓ の値を次第に大きくしたときに $P_{-\ell}$ および P_i の値が次第に0に収束し, (19)式が収束するかどうかと云うことである。この問題に対しては一般的に解決することは困難であるが, 少くも一辺が壁で支持された場合には実際の計算例によって収束することが証明された。

参 考 文 献

- 1) 堯天義久：無梁版構造に関する研究，建築学会研究報告，才14，18，20号
- 2) 岡村宏一：有限巾無梁板構造の曲げについて，土木学会才19 回年次学術講演会講演概要，才I部，昭和39年5月
- 3) Stephen P. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger: Theory of Plates and Shells, p.249