

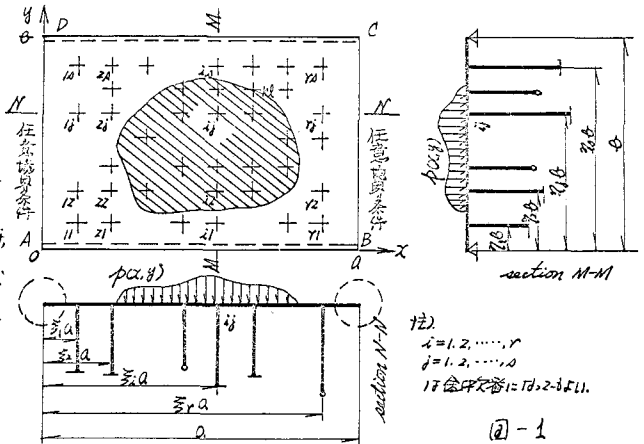
I-96 無梁板構造の影響面解法

九州大学工学部 石員 山崎 徳世
九州大学工学部 石員 ○橋 本 武

1. 緒言 R.E. Wooding¹⁾は9パネル無梁板構造を差分法を用いて解析のうえ、板上の各点における曲げモーメントを算出し、その結果を図示することにより影響面をおのづから明らかにし、これは単に差分法の応用例と称するべきで、無梁板構造の影響面解法を直接提案したものとはいえない。これに対し、著者らは固直が単純支持しかつ中間において任意配列の支えで支えられるごとき無梁板構造に関して、板および柱の各種断面諸量に関する影響面の厳密式を導出し、無梁板構造の不規則な影響面解法を論じたが、このことは広範囲の無梁板構造に対して、移動集中荷重が作用する場合も勿論のこと、各種垂直荷重が作用する場合の解析または設計に算に直接寄与するものである。しかしながら、無梁板構造が中間において支えで支えられるものと仮定したことは、柱で支持される実際の構造に対して厳密解をよめるものではなから、この意味で本法とはいふ近似解法であるといえる。そこで、本研究では、前論文を拡張応用し、柱の曲げ剛性をも考慮したより厳密な無梁板構造の影響面解法を提案せんことをこの目的とする。

2. 基本連立方程式および板の弾性断面

図-1に示すごとく、1辺が単純支持され、他3辺が任意境界条件を有するものと仮定し、中間に2任意配列の柱で支持される無梁板構造において、各柱に生ずる垂直反力を P_{ij} 、反力モーメントを M_{ij}^x, M_{ij}^y とすれば、それら諸力を求めるための基本連立方程式は、著者らが提案した基本法²⁾により次のごとく与えられる。



d_{ij} : 柱 i, j 頭部の垂直変位,

θ_{ij}^x : 柱 i, j 頭部の x 方向回転角,

θ_{ij}^y : 柱 i, j 頭部の y 方向回転角, D : 板剛性, $\mu = b/a$,

$$\begin{bmatrix} \langle H_{ij}^{xx} \rangle & \langle H_{ij}^{xy} \rangle & \langle H_{ij}^{yy} \rangle \\ \langle O_{ij}^{xx} \rangle & \langle O_{ij}^{xy} \rangle & \langle O_{ij}^{yy} \rangle \\ \langle Q_{ij}^{xx} \rangle & \langle Q_{ij}^{xy} \rangle & \langle Q_{ij}^{yy} \rangle \end{bmatrix} \cdot X = \frac{ab}{4} \begin{bmatrix} (L_{ij} - \frac{\mu D}{4a} d_{ij}) \\ (L_{ij}^x - \frac{\mu D}{4a} \theta_{ij}^x) \\ (L_{ij}^y - \frac{\mu D}{4a} \theta_{ij}^y) \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$X = \{ V_{i1} \ V_{i2} \ \dots \ V_{ij} \ \dots \ V_{i20} \ \frac{1}{2} M_{i1}^x \ \frac{1}{2} M_{i2}^x \ \dots \ \frac{1}{2} M_{ij}^x \ \dots \ -\frac{1}{2} M_{i20}^x \ \frac{1}{2} M_{i1}^y \ \frac{1}{2} M_{i2}^y \ \dots \ \frac{1}{2} M_{ij}^y \ \dots \ -\frac{1}{2} M_{i20}^y \}^T,$$

$i = 1, 2, \dots, r; \quad j = 1, 2, \dots, s$
17 全方程式は 17, 2, 2, 5, 11.

$H_{ij}^{xx} \sim Q_{ij}^{yy}$: 無梁板構造における柱の位置や板の辺長比により定まる形数定数, $\xi = x/a, \eta = y/b$

$$L_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (f_{mn}/K_{mn}) \{ f_{mn}(\xi_i) + \sin m\pi \xi_i \sin n\pi \eta_j \}, \quad L_{ij}^x = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (f_{mn}/K_{mn}) \{ f_{mn}(\xi_i) + m\pi \cos m\pi \xi_i \sin n\pi \eta_j,$$

$$L_{ij}^y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (f_{mn}/K_{mn}) \{ f_{mn}(\xi_i) + \sin m\pi \xi_i \sin n\pi \eta_j \}, \quad f_{mn} = \int_0^1 \int_0^1 f(\xi, \eta) \sin m\pi \xi \sin n\pi \eta \, d\xi \, d\eta,$$

$$K_{mn} = \{ (m\pi)^2 + (n\pi\mu)^2 \}^2, \quad f_{mn}(\xi): \xi = 0, 1 \text{ 辺に於ける境界条件に応じて定まる関数}$$

径 a の円形柱から反力モーメント M_{ij}^x, M_{ij}^y と $\theta_{ij}^x, \theta_{ij}^y$ との関係を算定する式(1)に代入すれば、連立方程式の数と未知数の数が一致し、したがって、これより柱の諸不特定反力を求めることができることとす。

1), この結果を用いた図-1に示す無梁板構造における板の押圧曲面が与えられ, 次式のとくである。

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} G_{mn} \{ f_{mn}(\xi) + \sin m\pi \xi \} \sin n\pi \eta \quad (2) \quad G_{mn} = \left(\frac{q}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{T_{mn}}{K_{mn}}$$

$$T_{mn} = f_{mn} - \frac{q}{ab} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ V_{k\ell} T_{k\ell}(m, n) \sin m\pi \xi_k \sin n\pi \eta_{\ell} - \frac{1}{a} N_{k\ell} T_{k\ell}^{\alpha}(m, n) \cos m\pi \xi_k \sin n\pi \eta_{\ell} - \frac{1}{b} N_{k\ell}^{\beta} T_{k\ell}^{\beta}(m, n) \sin m\pi \xi_k \cos n\pi \eta_{\ell} \right\},$$

$$T_{k\ell}(m, n) = \frac{1}{\pi^2 U_{k\ell} V_{k\ell} mn} \sin m\pi U_{k\ell} \sin n\pi V_{k\ell}, \quad T_{k\ell}^{\alpha}(m, n) = \frac{3}{\pi^2 U_{k\ell} V_{k\ell} mn} \left(\frac{\sin m\pi U_{k\ell}}{m\pi U_{k\ell}} - \cos m\pi U_{k\ell} \right) \sin n\pi V_{k\ell},$$

$$T_{k\ell}^{\beta}(m, n) = \frac{3}{\pi^2 U_{k\ell} V_{k\ell} mn} \left(\frac{\sin n\pi V_{k\ell}}{n\pi V_{k\ell}} - \cos n\pi V_{k\ell} \right) \sin m\pi U_{k\ell}, \quad 2U_{k\ell} a \times 2V_{k\ell} b: \text{柱 } k\ell \text{ の断面 (矩形)}.$$

3. 影響面解法 (1) 柱の垂直反力および反力モーメント: 板上の任意点 $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ に単位集中荷重 $P=1$ が作用するものとす。その支座直下フーリエ級数展開式における展開係数は次のとおりである。

$$f_{mn} = \frac{q}{ab} \sin m\pi \bar{\xi} \sin n\pi \bar{\eta} \quad (3) \quad \text{また, 各中間柱の垂直変位は } \delta_{ij} = 0 \text{ とす。}$$

さらに, 柱頭部に作用する反力モーメント M_{ij}^x, M_{ij}^y と, その回転角 $\theta_{ij}^x, \theta_{ij}^y$ との関係がたわみ角式より次のとおり求められるものとす。

$$\theta_{ij}^{x(\text{or } y)} = -\tilde{r}_{ij}^{x(\text{or } y)} \cdot M_{ij}^{x(\text{or } y)} \quad (4)$$

以上の諸式を式(1)に代入すれば, 本題の無梁板構造の基本連立方程式が与えられ, 次の内容となる。

$$D \cdot X = \frac{qb}{4} L \quad (5) \quad \text{ここに, 係数行列 } D \text{ は式(4)右辺の } \theta_{ij}^{x(\text{or } y)} \text{ に式(4)を代入し, 左辺に移項して得られる}$$

$$\text{諸値をも含む } \alpha \text{ とす。} \quad L = \{ L_{11} \ L_{12} \ \dots \ L_{1j} \ \dots \ L_{1s} \ L_{21}^x \ L_{21}^y \ \dots \ L_{2j}^x \ \dots \ L_{2s}^x \ L_{21}^y \ L_{22}^y \ \dots \ L_{2j}^y \ \dots \ L_{2s}^y \}^T,$$

$$L_{ij} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K_{mn}} \left\{ \frac{q}{ab} \sin m\pi \bar{\xi} \sin n\pi \bar{\eta} \right\} \{ f_{mn}(\xi_i) + \sin m\pi \xi_i \} \sin n\pi \eta_j, \quad L_{ij}^x = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K_{mn}} \left\{ \frac{q}{ab} \sin m\pi \bar{\xi} \sin n\pi \bar{\eta} \right\} \{ f_{mn}(\xi_i) + m\pi \cos m\pi \xi_i \} \sin n\pi \eta_j,$$

$$L_{ij}^y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{K_{mn}} \left\{ \frac{q}{ab} \sin m\pi \bar{\xi} \sin n\pi \bar{\eta} \right\} \{ f_{mn}(\xi_i) + \sin m\pi \xi_i \} n\pi \cos n\pi \eta_j.$$

係数行列 D から K 行および I 列を取り除いた行列を D_{KI} とす。式(5)の連立方程式の解が最終的に次のとおり導かれる。

$$V_{ij} = \frac{1}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[(-1)^{K+I} D_{KI} \{ f_{mn}(\xi_k) + \sin m\pi \xi_k \} \sin n\pi \eta_{\ell} + (-1)^{K+I+1} D_{(K+2I)I} \{ f'_{mn}(\xi_k) + m\pi \cos m\pi \xi_k \} \sin n\pi \eta_{\ell} \right. \\ \left. + (-1)^{K+2I+I+1} D_{(K+2I)I} \{ f_{mn}(\xi_k) + \sin m\pi \xi_k \} n\pi \cos n\pi \eta_{\ell} \right] \frac{1}{K_{mn}} \sin m\pi \bar{\xi} \sin n\pi \bar{\eta} \quad (6)$$

$$M_{ij}^x = -\frac{q}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[(-1)^{K+(I+2V)} D_{K(I+2V)} \{ f_{mn}(\xi_k) + \sin m\pi \xi_k \} \sin n\pi \eta_{\ell} + (-1)^{K+I+I+2V} D_{(K+2I)(I+2V)} \{ f'_{mn}(\xi_k) + m\pi \cos m\pi \xi_k \} \sin n\pi \eta_{\ell} \right. \\ \left. + (-1)^{K+2I+I+2V} D_{(K+2I)(I+2V)} \{ f_{mn}(\xi_k) + \sin m\pi \xi_k \} n\pi \cos n\pi \eta_{\ell} \right] \frac{1}{K_{mn}} \sin m\pi \bar{\xi} \sin n\pi \bar{\eta} \quad (7)$$

$$M_{ij}^y = -\frac{q}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[(-1)^{K+(I+2V)} D_{K(I+2V)} \{ f_{mn}(\xi_k) + \sin m\pi \xi_k \} \sin n\pi \eta_{\ell} + (-1)^{K+2I+I+2V} D_{(K+2I)(I+2V)} \{ f'_{mn}(\xi_k) + m\pi \cos m\pi \xi_k \} \sin n\pi \eta_{\ell} \right. \\ \left. + (-1)^{K+2I+I+2V} D_{(K+2I)(I+2V)} \{ f_{mn}(\xi_k) + \sin m\pi \xi_k \} n\pi \cos n\pi \eta_{\ell} \right] \frac{1}{K_{mn}} \sin m\pi \bar{\xi} \sin n\pi \bar{\eta} \quad (8)$$

$$\text{ここに, } D = \det D, \quad D_{KI} = \det D_{KI}, \quad K = (k-1)s + l, \quad I = (i-1)s + j$$

単位集中荷重 $P=1$ が移動荷重と考へられ, 式(6)~(8)は柱 ij の垂直反力 V_{ij} , 反力モーメント M_{ij}^x, M_{ij}^y の影響面を表すものとす。

(2) たわみの影響面: 式(3)および式(6)~(8)を式(2)に代入すれば, 任意点 $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ に単位集中荷重 $P=1$ が作用する場合の無梁板の押圧曲面が与えられ, かつ式に定数 q の係数値 $\xi = \xi_g, \eta = \eta_g$ を代入すれば, 本題の無梁板構造における板上の定数 q のたわみ影響面式 $w_g(\xi_g, \eta_g)$ が求められることとなる。結果のたわみは次式のとくである。

$$w_g = \frac{qg}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\{ f_{mn}(\xi_g) + \sin m\pi \xi_g \} \sin n\pi \eta_g - A(m, n, g) \right] \frac{1}{K_{mn}} \sin m\pi \bar{\xi} \sin n\pi \bar{\eta} \quad (9)$$

$$\text{ここに, } f_1(m, n, k, l) = \{ f_{mn}(\xi_k) + \sin m\pi \xi_k \} \sin n\pi \eta_{\ell}, \quad f_2(m, n, k, l) = \{ f'_{mn}(\xi_k) + m\pi \cos m\pi \xi_k \} \sin n\pi \eta_{\ell}$$

$$f_3(m, n, k, l) = \{ f_{mn}(\xi_k) + \sin m\pi \xi_k \} n\pi \cos n\pi \eta_{\ell}, \quad T(m, n) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \left[(-1)^{K+I} D_{KI} f_1(m, n, k, l) + (-1)^{K+I+1} D_{(K+2I)I} f_2(m, n, k, l) \right. \\ \left. + (-1)^{K+2I+I+1} D_{(K+2I)I} f_3(m, n, k, l) \right], \quad T_x(m, n) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \left[(-1)^{K+(I+2V)} D_{K(I+2V)} f_1(m, n, k, l) + (-1)^{K+I+I+2V} D_{(K+2I)(I+2V)} f_2(m, n, k, l) \right. \\ \left. + (-1)^{K+2I+I+2V} D_{(K+2I)(I+2V)} f_3(m, n, k, l) \right], \quad T_y(m, n) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \left[(-1)^{K+(I+2V)} D_{K(I+2V)} f_1(m, n, k, l) + (-1)^{K+2I+I+2V} D_{(K+2I)(I+2V)} f_2(m, n, k, l) \right. \\ \left. + (-1)^{K+2I+I+2V} D_{(K+2I)(I+2V)} f_3(m, n, k, l) \right],$$

$$W_{ij}(q) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_{mn}} \Gamma_{ij}^m(p, q) \sin p \pi \xi_i \sin q \pi \xi_j \{ f_{pq}(\xi_q) + \sin p \pi \xi_q \} \sin q \pi \xi_j$$

$$W_{xij}(q) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_{mn}} \Gamma_{ij}^m(p, q) \cos p \pi \xi_i \sin q \pi \xi_j \{ f_{pq}(\xi_q) + \sin p \pi \xi_q \} \sin q \pi \xi_j$$

$$W_{yij}(q) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_{mn}} \Gamma_{ij}^m(p, q) \sin p \pi \xi_i \cos q \pi \xi_j \{ f_{pq}(\xi_q) + \sin p \pi \xi_q \} \sin q \pi \xi_j$$

$$A(m, n, q) = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \{ W_{ij}(q) \cdot \Pi(m, n) + W_{xij}(q) \cdot \Pi_x(m, n) + W_{yij}(q) \cdot \Pi_y(m, n) \}$$

上式中の $W_{ij}(q)$, $W_{xij}(q)$, $W_{yij}(q)$ はその定義式の内容から明らかでなくともその意味をもつ。

$W_{ij}(q)$ = 基本板 (無梁板構造) から中間 a 柱を取り除いて得られる 1 径矩形板の ij に単位荷重 q が加わると、 ij 点下の z 軸に垂直変位を $\mu D/4a$ 倍したものである。

$W_{xij}(q)$ = 基本板の ij に単位 x -方向荷重 m_x が加わると、 ij 点下の z 軸に垂直変位を $\mu D/4a$ 倍したものである。

$W_{yij}(q)$ = 基本板の ij に単位 y -方向荷重 m_y が加わると、 ij 点下の z 軸に垂直変位を $\mu D/4a$ 倍したものである。

(b) 下の板角、曲げモーメントおよびねじりモーメントの影響面：板のたわみ w と、たわみ角、曲げモーメントおよびねじりモーメントとの周知の関係式に式(9)を代入し、演算整理すると、板の各部面諸量に關する影響面式が算定されることとなるが、版面 a 都合上 ij における x および y 方向の曲げモーメント $M_x(\xi_q, \eta_q)$, $M_y(\xi_q, \eta_q)$ の影響面式の内容を以下に示す。

$$M_x(\xi_q, \eta_q) = \frac{K}{\mu} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_{mn}} \left[-f_{mn}''(\xi_q) + m^2 \pi^2 \sin m \pi \xi_q + \nu \left(\frac{m}{\mu} \right)^2 (f_{mn}(\xi_q) + \sin m \pi \xi_q) \right] \sin m \pi \xi_q \sin n \pi \eta_q - \{ A^{xx}(m, n, q) + \frac{\nu}{\mu^2} A^{yy}(m, n, q) \} \sin m \pi \xi_q \sin n \pi \eta_q \quad (10)$$

$$M_y(\xi_q, \eta_q) = \frac{K}{\mu} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_{mn}} \left[\nu (f_{mn}''(\xi_q)) + m^2 \pi^2 \sin m \pi \xi_q + \left(\frac{m}{\mu} \right)^2 (f_{mn}(\xi_q) + \sin m \pi \xi_q) \right] \sin m \pi \xi_q \sin n \pi \eta_q - \{ \nu A^{xx}(m, n, q) + \frac{1}{\mu^2} A^{yy}(m, n, q) \} \sin m \pi \xi_q \sin n \pi \eta_q \quad (11)$$

$$A^{xx}(m, n, q) = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \{ W_{ij}^{xx}(q) \cdot \Pi(m, n) + W_{xij}^{xx}(q) \cdot \Pi_x(m, n) + W_{yij}^{xx}(q) \cdot \Pi_y(m, n) \}$$

$$A^{yy}(m, n, q) = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \{ W_{ij}^{yy}(q) \cdot \Pi(m, n) + W_{xij}^{yy}(q) \cdot \Pi_x(m, n) + W_{yij}^{yy}(q) \cdot \Pi_y(m, n) \}$$

$W_{ij}^{xx}(q)$ = 基本板の ij に単位荷重 q が加わると、 ij 点下の z 軸に垂直変位を $\mu D/4a$ 倍したものである。

$W_{xij}^{xx}(q)$ = 基本板の ij に単位 x -方向荷重 m_x が加わると、 ij 点下の z 軸に垂直変位を $\mu D/4a$ 倍したものである。

$W_{yij}^{xx}(q)$ = 基本板の ij に単位 y -方向荷重 m_y が加わると、 ij 点下の z 軸に垂直変位を $\mu D/4a$ 倍したものである。

$W_{ij}^{yy}(q)$ = 基本板の ij に単位荷重 q が加わると、 ij 点下の z 軸に垂直変位を $\mu D/4a$ 倍したものである。

$W_{xij}^{yy}(q)$ = 基本板の ij に単位 x -方向荷重 m_x が加わると、 ij 点下の z 軸に垂直変位を $\mu D/4a$ 倍したものである。

$W_{yij}^{yy}(q)$ = 基本板の ij に単位 y -方向荷重 m_y が加わると、 ij 点下の z 軸に垂直変位を $\mu D/4a$ 倍したものである。

(c) 柱の断面諸量の影響面：単位集中荷重 $P=1$ が板上面に作用する場合に、柱 ij に伝えられる不特定モーメントは M_{ij} , M_{ij}' である。したがって、柱下端の反力 R 、任意断面におけるたわみ、たわみ角、曲げモーメント、せん断力 Q の各部面諸量は M_{ij} , M_{ij}' により不特定モーメントの 1 次関数で表わされることとなるので、不特定モーメントの影響面の求め方は以下の通りである。図 2-1 に示すように、図 2-2 に示す単純支持した、かつ中間に 2 本の柱に 2 支持される無梁板構造の諸不特定力および板の断面諸量に關する影響面を求め

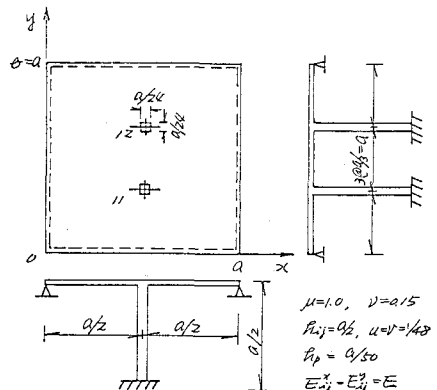
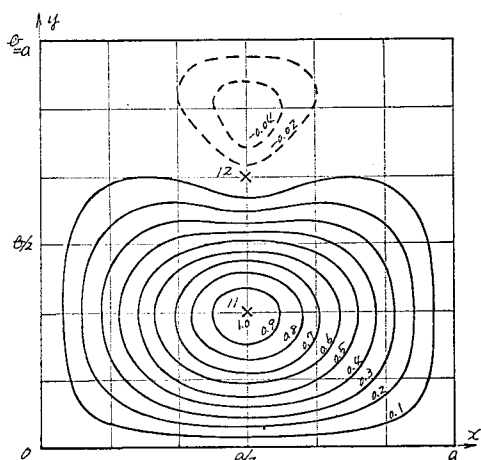
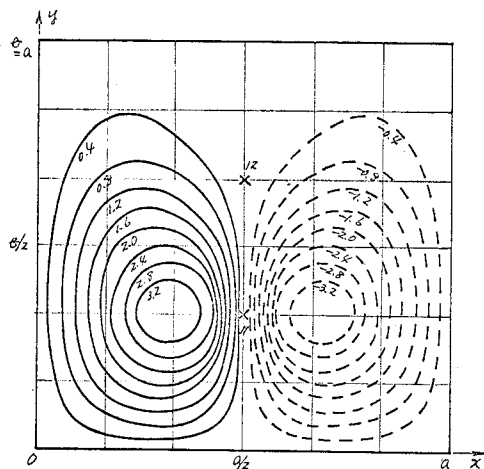


図 - 2.

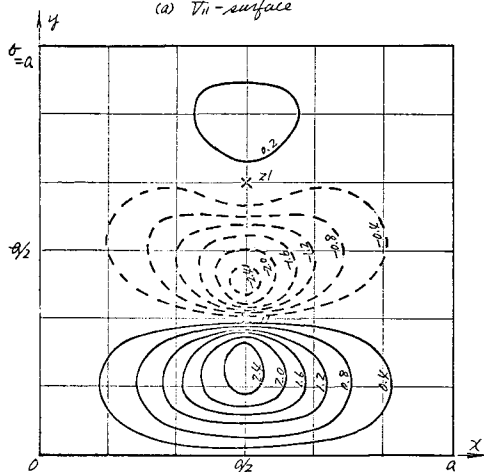
4. 計算例 (a) 図 2-1 に示すように、図 2-2 に示す単純支持した、かつ中間に 2 本の柱に 2 支持される無梁板構造の諸不特定力および板の断面諸量に關する影響面を求め



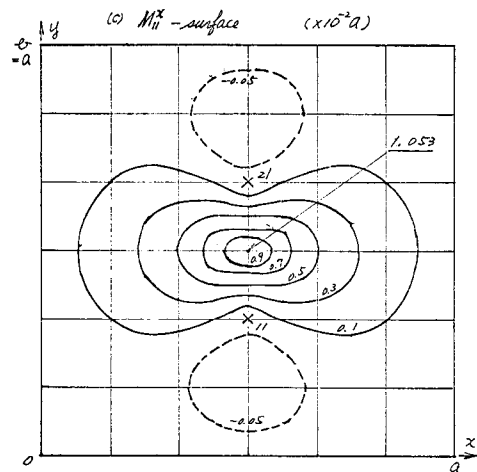
(a) V_1 -surface



(c) M_2^x -surface ($\times 10^{-2}a$)



(b) M_1^y -surface ($\times 10^{-2}a$)



(d) $W(1/2, 1/2)$ -surface ($\times 10^{-3}a^2b$)

は、図-3のごとくである。

図-3.

5. 結論 無梁板構造における板の断面諸量の影響面式は形式助には4次級数と見るが(式(9)へ(11)参照)、その内容は2次級数の積であり収束級数と見る。加之、一方の2次級数($M_{ij}(y)$ だけ)は11すなわち板構造として最も基本的かつ簡単な1次元矩形板に対する基本板の断面諸量で定義することができ、これらについてあらかじめの計算のうえ図表にすることが既に既述の結果を用いることにより影響面を簡単に2次級数を計算するだけの簡単な内容となり、計算上は勿論のこと高精度解をうるうえからも極めて好都合であり、本法の実用性も著るしく高いことが可能となる。なお、本研究には京都府立研究費の補助を受けた。記して謝意を表す。

参考文献

- 1) R.E. Wooding & C.P. Siess: Influence Surfaces for Continuous Plates, Proc. ASCE, vol. 94, No. 1, Jan. 1968
- 2) T. Yamazaki & T. Chisuyuki: Analysis of Influence Surfaces of Simply Supported Rectangular Plates with Intermediate Simple Supports (Flat Slabs), Proc. of 16th JNCAM, 1966, Dec. 1967
- 3) 橋本: 無梁板構造の解法に関する研究 (学位論文)