

九州大学 工学部 正 員 山崎徳也
九州大学 工学部 正 員 後藤忠之輔
九州大学 工学部 学生員 中沢隆雄

1. 序 はり無しで柱のみにより支持される床版すなわちフラットスラブは、床版下のフリアランスが入り込み、倉庫、地下鉄、配水池および工場などの枠組やべた基礎として土木、建築などの各種構造物に多く採用されている。柱の断面形としては円形、矩形および八角形が一般的であり、円柱の場合は多くの研究者によって解析されているが、矩形柱、八角形柱などに関しては実際に数多く施工されているにもかかわらず研究されていないようである。

本論文は、以上の観点から規則的に配列された剛結正多角形柱をもつ等分布満載の無限床版を、複素変数法により第2種境界値問題として解析し、特に柱と床版の剛結部における応力集中を、柱の各種形状について比較吟味するとともに、この種床版の特性を解明せんとするものである。なお、ここでは解法のみを示すこととする。

2. 解法 図-1に示すとき等間隔に配列された正多角形柱をもつ無限床版を取り扱う場合、床版の対称性を考慮することにより、図の領域 k, l, m, n のみを対象とすればよく、以下この領域について解法を述べることとする。

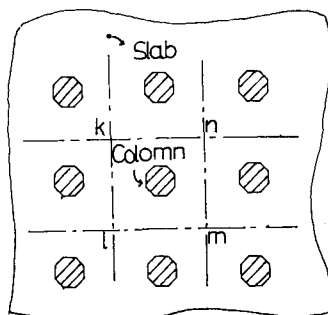


図 - 1

(1) 基本公式 横荷重を受ける床版の曲げ問題は、その中立面内に直角座標 (x, y) を導入して、次の微分方程式を解くことに帰着する。

$$\nabla^4 w = p/D \quad (1)$$

ここに w : 床版面に垂直下向きの変位, p : 床版面に垂直下向きの荷重強度, D : 床版の曲げ剛性
特に $p=0$ の場合、式(1)は重調和方程式となり、この解は複素数 z の2つの解析関数 $\Phi(z)$, $\bar{\Phi}(z)$ を用いることにより、次の式で与えられる。

$$w(x, y) = \text{Re}[\bar{z}\Phi(z) + \bar{\chi}(z)] \quad \text{ここに } z = x + iy, \bar{z}: z \text{ の共役数} \quad (2)$$

また、モーメントやせん断力の諸成分は、上記解析関数を用いて次のごとく求められる。

$$\left. \begin{aligned} M_x + M_y &= -2D(1+\nu)[\bar{\Phi}(z) + \Phi(z)] \\ M_y - M_x - 2iM_{xy} &= 2D(1-\nu)[\bar{z}\Phi'(z) + \bar{\chi}'(z)] \\ Q_x - iQ_y &= -4D\bar{\Phi}'(z) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここに ν : 床版のポアソン比, $\bar{\chi}(z) = d\chi(z)/dz \quad (4)$

図-2において、 s は柱と床版の境界 Γ の接線、 n は Γ の外向き法線とすれば、 Γ 上の変形は次の式で表わされる。

$$\bar{\Phi}(z) + z\bar{\Phi}(z) + \bar{\chi}(z) = e^{i\alpha} \left(\frac{\partial w}{\partial n} + i \frac{\partial w}{\partial s} \right) \quad (5)$$

ここに、 α は x 軸と n とのなす角である。

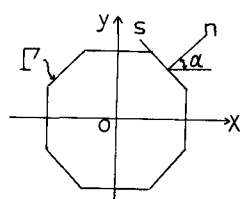


図 - 2

さて、 z 面上にある柱の外部領域を S 面上の単位円 σ の外部に写像する式を次のごとく定義する。

$$z = \omega(S) \quad \text{ここに} \quad S = \rho e^{i\beta}, \quad (\rho, \beta): \text{直交曲線座標} \quad (6)$$

しかると、 $\Phi(z)$, $X(z)$, $\bar{\Phi}(z)$ は式(6)を用いて次のごとく変換される。

$$\bar{\Phi}(z) = \bar{\Phi}[\omega(S)] = \bar{\varphi}(S), \quad X(z) = X[\omega(S)] = \chi(S), \quad \bar{\Phi}(z) = \bar{\Phi}[\omega(S)] = \psi(S) \quad (7)$$

また、式(7)を用いることにより、式(3)の諸関係は次のごとくなる。

$$\left. \begin{aligned} M_\beta + M_\beta &= -2D(1+\nu)[\mu(S) + \overline{\mu(S)}] \\ M_\beta - M_\beta - 2iM_{\beta\beta} &= \frac{2D(1-\nu)S^2}{\rho^2 \omega(S)} [\mu(S) \overline{\omega(S)} + \psi(S)] \\ Q_\beta - iQ_{\beta\beta} &= -\frac{4DS}{\rho \omega(S)} \mu'(S) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\text{ここに} \quad \mu(S) = \varphi'(S)/\omega'(S) \quad (9) \quad |\omega'(S)| = \{\omega'(S) \cdot \overline{\omega'(S)}\}^{1/2} \quad (10)$$

同様に、式(5)も次のごとく変換される。

$$\varphi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = f_1 + if_2 \quad (11)$$

$$\text{ここに} \quad f_1 + if_2 = e^{i\alpha} (\partial w / \partial n + i \partial w / \partial s) \quad (12) \quad \sigma = (S)_{\rho=1} = e^{i\beta} \quad (13)$$

本題の柱と床版の境界 Γ の外側にある領域内の応力分布は、 $\varphi_0(S)$, $\psi_0(S)$ を柱の無い床版が無限遠点すなわち隣接領域との接線部においてモーメントおよびせん断力を受け、原点($x=0, y=0$)に集中荷重が作用する場合の複素応力関数として、次の合成応力関数により決定される。

$$\varphi(S) = \varphi_0(S) + \varphi_c(S), \quad \psi(S) = \psi_0(S) + \psi_c(S) \quad (14)$$

ここに、 $\varphi_c(S)$, $\psi_c(S)$ は $\varphi(S)$, $\psi(S)$ が境界条件を満足するごとく選ばれた補正関数である。

式(14)を式(11)に代入し、 z 面上の境界 Γ に対応する単位円 σ において $\partial w / \partial s = 0$, $\partial w / \partial n = 0$ を考慮することにより次式をうる。

$$\varphi_c(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi_c'(\sigma)} + \overline{\psi_c(\sigma)} = f_1^0 + if_2^0 \quad (15)$$

$$\text{ここに} \quad f_1^0 + if_2^0 = -\left[\varphi_0(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi_0'(\sigma)} + \overline{\psi_0(\sigma)} \right] \quad (16)$$

式(15)およびその共役式を σ に沿って Cauchy 積分することにより次式がえられ。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_c(S) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi_c'(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma - S} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (f_1^0 + if_2^0) \frac{d\sigma}{\sigma - S} \\ \psi_c(S) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}} \overline{\varphi_c'(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma - S} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (f_1^0 - if_2^0) \frac{d\sigma}{\sigma - S} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

式(17)より $\varphi_c(S)$ および $\psi_c(S)$ が求められ、 $\chi_c(S)$ は次式により決定される。 $\chi_c(S) = \int \psi_c(S) \omega'(S) dS$ (18)

以上で求められた $\varphi_c(S)$ および $\chi_c(S)$ を式(6),(7)に用いれば、式(2)より補正応力関数が次式のごとく求められる。

$$w_c = \text{Re} [\overline{\omega(S)} \varphi_c(S) + \chi_c(S)] \quad (19)$$

(2) 正多角形柱を有する正方形領域における応力関数の決定 図-3に示すごとく、正多角形柱の境界 Γ および直線 $x = \pm a/2$, $y = \pm a/2$ によって囲まれるフラットスラブの正方形領域を考える。この境界 Γ の外部領域を S 面上の単位円 σ の外部に写像する関数は次のごとく有限べき級数で与えられる(文献(1)参照)。

$$z = \omega(S) = R(S + a_{N-1}S^{-N+1} + a_{2N-1}S^{-2N+1}) \quad (20)$$

ここに R : 柱の大きさを与える実数定数, a_n : 実数係数, N : 正多角形の辺数

q を等分布荷重強度とすれば、床版のたわみ w は次に示す諸条件を満足しなければならない。

- (i) 微分方程式 $\nabla^4 w = q/D$ (ii) 床版の幾何学的対称性
 (iii) E で $w=0, \partial w/\partial n=0$ すなわち Γ で $w=0, \partial w/\partial \rho=0$
 (iv) $x=\pm a/2$ で $\partial w/\partial x=0, Q_x=0$, $y=\pm a/2$ で $\partial w/\partial y=0, Q_y=0$
 条件(i)(ii)は、たわみを次の形にとることによって満足される。

$$w = w_g + w_p + \sum_{n=1}^{\infty} A_n w_n \quad (21)$$

$$\text{ここに } w_g = w_{og} + w_{cg}, \quad w_{og} = q(z\bar{z})^2/64D \quad (22)$$

$$w_p = w_{op} + w_{cp}, \quad w_{op} = -qa^2 \{ \bar{z}\bar{z} \log(\sqrt{z\bar{z}}) + \bar{z} \int \bar{z}/s \, ds + z \int \bar{z}/s \, ds \} \quad (23)$$

$$w_n = w_{on} + w_{cn}, \quad w_{o1} = qR^2 \bar{z}\bar{z}/D, \quad w_{o2} = q(z^4 + \bar{z}^4)/2D, \quad w_{o3} = q\bar{z}\bar{z}(z^4 + \bar{z}^4)/2DR^2 \\ w_{o4} = q(\bar{z}^8 + \bar{z}^8)/2DR^4, \quad w_{o5} = q\bar{z}\bar{z}(\bar{z}^8 + \bar{z}^8)/2DR^6 \quad (24)$$

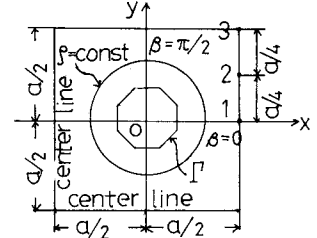


図-3

ここで、 w_g は柱のない床版に等分布荷重 q が作用した場合のたわみ関数、 w_p は同一床版に入ってきた qa^2 の中央集中荷重が作用した場合のたわみ関数、 w_n は条件(iv)を満足するためには付加される補正たわみ関数であり、 A_n は未定係数である。

w_{cg}, w_{cp} および w_{cn} は w_g, w_p および w_n が条件(iii)を満足することと決定しなければならない。
 条件(iv)に関しては点1, 2, 3において $\partial w/\partial x=0$, 点1, 3において $Q_x=0$ の選点法を採用し、これより A_n が次式によって定められるが、その内容は省略する。

$$\partial w/\partial \rho=0, Q_\rho=0 \text{ (点1)}, \quad \partial w/\partial \rho \cos \alpha - 1/2 \cdot \partial w/\partial \beta \cdot \sin \alpha = 0 \text{ (点2)}, \quad \partial w/\partial \rho=0, Q_\rho=0 \text{ (点3)} \quad (25)$$

$$\text{ここに, } \sin \alpha, \cos \alpha \text{ は次式より求められるものである。} \quad e^{2i\alpha} = e^{2i\beta} \cdot \omega'(s)/\bar{\omega}'(s) \quad (26)$$

(3) 断面諸量の算定 以上により複素たわみ関数がえられ、これを式(8)に代入することにより所要の断面諸量が算定される。この算定に必要な各たわみ関数の詳細を示せば、以下のとおりである。

$$(a) w_g: \quad w_{og} = qR^4/64D \sum_{n=0, N}^{\infty} B_n \cos n\beta$$

$$\text{ここに } B_0 = \frac{1}{2} (a_{N+1}^2 + a_{2N+1}^2) + a_{2N+1}^2, \quad B_N = 2(a_{N+1}^2 + a_{2N+1}^2) + a_{2N+1}^2, \quad B_{2N} = 2a_{2N+1}^2$$

$$B_{cg} = -qR^3/16D \sum_{n=0, N}^{\infty} B'_n S^{-n+1}$$

$$\text{ここに } B'_{N+1} = \{ 2a_{N+1} + a_{2N+1} (a_{N+1}^2 + 2a_{2N+1}^2) + 2a_{N+1} a_{2N+1} \} / (1 - 3a_{2N+1}^2)$$

$$B'_{2N+1} = a_{N+1}^2 + 2a_{2N+1}^2 + 2a_{N+1} a_{2N+1} + a_{2N+1}^2, \quad B'_{3N+1} = 2a_{N+1} a_{2N+1} + a_{N+1} a_{2N+1}^2, \quad B'_{4N+1} = a_{2N+1}^2$$

$$B_{cg} = qR^4/16D \left[B_e \log s + \sum_{n=0, N}^{\infty} B''_n S^{-n} \right]$$

$$\text{ここに } B_e = -\{ 1 + 2a_{N+1} + a_{2N+1} (a_{N+1}^2 + 2a_{2N+1}^2) - (N+1)^2 a_{N+1} a_{2N+1} B'_{N+1} - (N+1) a_{N+1} B'_{N+1} - (2N+1) a_{2N+1} B'_{2N+1} \}$$

$$B''_0 = -1/N \{ (1 + a_{N+1}^2 + a_{2N+1}^2 + 2a_{N+1} (1 + a_{2N+1}^2) + 2a_{2N+1}^2) \} - (a_{N+1} B'_{N+1} + a_{2N+1} B'_{2N+1}) \quad (\text{積分定数})$$

$$B''_N = 1/N \{ [a_{N+1} + 2a_{N+1} a_{2N+1} - (N+1) \{ 1 + 2a_{N+1}^2 + a_{2N+1} (a_{N+1}^2 + 2a_{2N+1}^2) \} - (N+1)(2N+1) a_{2N+1}^2 B'_{N+1} - (N+1) B'_{N+1} \\ - (2N+1) a_{N+1} B'_{2N+1} - (3N+1) a_{2N+1} B'_{3N+1}]$$

$$B''_{2N} = 1/2N \{ [a_{N+1} - (N+1) a_{N+1} (a_{N+1} + 2a_{N+1} a_{2N+1}) - (2N+1) a_{2N+1} \{ 1 + 2a_{N+1}^2 + a_{2N+1} (a_{N+1}^2 + 2a_{2N+1}^2) \} \\ - (2N+1) B'_{2N+1} - (3N+1) a_{N+1} B'_{3N+1} - (4N+1) a_{2N+1} B'_{4N+1}]$$

$$B''_{3N} = 1/3N \{ - (N+1) a_{N+1} a_{2N+1} - (2N+1) a_{2N+1} (a_{N+1} + 2a_{N+1} a_{2N+1}) - (3N+1) B'_{3N+1} - (4N+1) a_{N+1} B'_{4N+1} \}$$

$$B''_{4N} = 1/4N \{ - (2N+1) a_{2N+1}^2 + (4N+1) a_{2N+1}^2 \}$$

$$w_{cg} = qR^4/64D \sum_{n=0, N}^{\infty} B''_n \cos n\beta$$

$$\text{ここに } B_{g0} = B_0 + 2a_{N+1} (a_{N+1}^2 + a_{2N+1}^2) + 2a_{2N+1}^2 + 4(B'_0 + a_{N+1} B'_{N+1} + a_{2N+1} B'_{2N+1}) + 4B_e \log s$$

$$B_{2-N} = 4(a_{N-1}B_0 + a_{N-1}a_{2N-1})(s^{2-N} + a_{2N-1}s^{2-2N}) + 4(B_{N-1}s^{2-N} + a_{N-1}B'_{2N-1}s^{2-2N} + a_{2N-1}B_{N-1}s^{2-3N} + a_{2N-1}B'_{3N-1}s^{2-5N} + B_Ns^{2-N})$$

$$B_{2-2N} = 2a_{2N-1}(s^{2-N} + a_{2N-1}s^{2-2N})^2 + 4a_{2N-1}(B_0 + 4(B'_{2N-1}s^{2-2N} + a_{N-1}B'_{3N-1}s^{2-4N} + a_{2N-1}B'_{4N-1}s^{2-6N} + B'_{2N}s^{2-2N}))$$

$$B_{2-3N} = 4a_{2N-1}(s^{2-2N} + a_{2N-1}s^{2-3N}) + 4(B'_{3N-1}s^{2-3N} + a_{N-1}B'_{4N-1}s^{2-5N} + B'_{3N}s^{2-3N})$$

$$B_{2-4N} = 2a_{2N-1}s^{2-3N} + 4(B'_{4N-1}s^{2-4N} + B'_{4N}s^{2-4N})$$

$$(a) w_p: w_{0p} = -8a^2R^2/8\pi D \left[\sum_{n=0, N}^{2N} C_n \cos n\beta + \log s \cdot \sum_{n=0, N}^{2N} C'_n \cos n\beta \right]$$

$$\rho_{0p} = -8a^2R^2/8\pi D \sum_{n=0, N}^{2N} C''_n s^{-n+1}, \quad \chi_{0p} = 8a^2R^2/8\pi D [C_0 \log s + \sum_{n=0, N}^{2N} C''_n s^{-n}]$$

$$\rho_{0p} = -8a^2R^2/8\pi D (s + a_{N-1}s^{-N+1} + a_{2N-1}s^{-2N+1}) \log(s + a_{N-1}s^{-N+1} + a_{2N-1}s^{-2N+1}), \quad \chi_{0p} = 0$$

$$w_p = -8a^2R^2/8\pi D \left[\sum_{n=0, N}^{2N} C_p n \cos n\beta + \log s \sum_{n=0, N}^{2N} C'_p n \cos n\beta \right]$$

$$(c) w_1: w_{01} = 8R^4/D \sum_{n=0, N}^{2N} D_n \cos n\beta$$

$$\rho_{01} = -24R^3/D \sum_{n=0, N}^{2N} D'_n s^{-n+1}, \quad \chi_{01} = -24R^4/D [D_0 \log s + \sum_{n=0, N}^{2N} D''_n s^{-n}]$$

$$\rho_{01} = 8R^3/D (s + a_{N-1}s^{-N+1} + a_{2N-1}s^{-2N+1}), \quad \chi_{01} = 0, \quad w_1 = 8R^4/D \sum_{n=0, N}^{2N} D_1 n \cos n\beta$$

$$(d) w_2: w_{02} = 8R^4/2D \sum_{n=0, N}^{2N} E_n \cos n\beta$$

$$\rho_{02} = -48R^3/D E'_{N-1} s^{-N+1}, \quad \chi_{02} = -48R^4/D [E_0 \log s + \sum_{n=0, N}^{2N} E''_n s^{-n}]$$

$$\rho_{02} = 0, \quad \chi_{02} = 8R^4/D (s + a_{N-1}s^{-N+1} + a_{2N-1}s^{-2N+1}), \quad w_2 = 8R^4/2D \sum_{n=0, N}^{2N} E_2 n \cos n\beta$$

$$(e) w_3: w_{03} = 8R^4/2D \sum_{n=0, N}^{2N} F_n \cos n\beta$$

$$\rho_{03} = -8R^3/D \sum_{n=0, 2N}^{2N} F'_n s^{-n+1}, \quad \chi_{03} = -8R^4/D [F_0 \log s + \sum_{n=0, N}^{2N} F''_n s^{-n}]$$

$$\rho_{03} = 8R^3/D (s + a_{N-1}s^{-N+1} + a_{2N-1}s^{-2N+1})^5, \quad \chi_{03} = 0, \quad w_3 = 8R^4/2D \sum_{n=0, N}^{2N} F_3 n \cos n\beta$$

$$(f) w_4: w_{04} = 8R^4/D \sum_{n=0, N}^{14N} G_n \cos n\beta$$

$$\rho_{04} = -88R^3/D \sum_{n=N}^{2N} G'_n s^{-n+1}, \quad \chi_{04} = -88R^4/D [G_0 \log s + \sum_{n=0, N}^{14N} G''_n s^{-n}]$$

$$\rho_{04} = 0, \quad \chi_{04} = 8R^4/D (s + a_{N-1}s^{-N+1} + a_{2N-1}s^{-2N+1})^3, \quad w_4 = 8R^4/D \sum_{n=0, N}^{14N} G_4 n \cos n\beta$$

$$(g) w_5: w_{05} = 8R^4/D \sum_{n=0, N}^{16N} H_n \cos n\beta$$

$$\rho_{05} = -8R^3/D \sum_{n=N, 2N}^{16N} H'_n s^{-n+1}, \quad \chi_{05} = -8R^4/D [H_0 \log s + \sum_{n=0, N}^{16N} H''_n s^{-n}]$$

$$\rho_{05} = 8R^3/D (s + a_{N-1}s^{-N+1} + a_{2N-1}s^{-2N+1})^9, \quad \chi_{05} = 0, \quad w_5 = 8R^4/D \sum_{n=0, N}^{16N} H_5 n \cos n\beta$$

ここに、係数 C_n, D_n, E_n 等は B_n 等と同じく写像函数の係数 a_{N-1}, a_{2N-1} 及び変換座標 s の函数である。

3. 結び 2重フーリエ級数によるフラットスラブの解法は、直角座標を用いるため柱の断面形状が正方形や矩形に限られ、かつ柱と床版の剛結部における応力集中を取り扱えない。これに対し、本論文に採用した複素変数法は、柱の形状いかんを問わず、かつ応力集中を厳密に解析する利点をもつ。また写像函数として、従来の Schwarz-Christoffel の変換公式によりえられ無限級数では、最初の数項で打ち切った場合、えられる柱形状が実際より大きく異なり、また多くの項を採用すれば算定が煩雑となるのに対して、Heller の手法を拡張応用する本法はわずかな項でも柱形状を正確に写像し、このため比較的簡単な計算で、高精度の解をうることである。

なお、本論文においては荷重等分布荷重が作用する場合について述べたが、集中荷重や部分等分布荷重が作用する場合についても目下研究中である。

参考文献 1) 山崎・後藤：任意形状をもつ無限板の熱応力解析，第24回土木学会年次学術講演会講演概要，昭和44年9月。