I-93　四辺形板の曲げ解析ーつづきー

大阪市立大学工学部　正員　倉田宗章
大阪市立大学工学部　○正員　谷平勉

**§1. まえがき。** 本研究は、本年春の関西支部講演会において発表*した、同じテーマのものを、改良発展させようとしたもので、その時には、全周単純支持された板について、板内選点法により、境界条件の関係から板のつり合式を $\Delta W = U$ と $\Delta U = q/D$ に分解して都合よく解くことができた。今回は全周固定板について、境界条件を満足するような2重級数を仮定して、板のつり合式に対する誤差を最小にするよう、数値的に積分することにより、その級数の未定係数を決定するという、解析的方法と数値計算的方法を適当に組合せた方法による解法についてのべたものである。全周固定の場合には、境界条件はたわみだけに関係しているので、その2つの境界条件を同時に満足するたわみ関数から、直接4階の微分方程式 $\Delta\Delta W = q/D$ を解くことができる。

**§2. 解法。** 選点法は、3角関数の多項式のような関数型を仮定したような場合、選点の位置によって、その関数値が0となる（その点で、仮定した多項式のすべての項にわたって、そのnodeとなる）ようなSingularな場合が起りうるので、未知数の個数と同じ数の選点を用いれば、うまくいかない場合がある。そこで選点の数を、少々のSingularな点を含んでいても全体に影響することなしに解けるようにするため、未知数の個数よりも相当多くの選点をとる。こうすると未知数の個数よりも多くの式ができるので、各点における誤差の2乗和を最小にするように、仮定した関数の未定係数を決定することができる。選点を板面全域に亘って規則的にとると、これは観点をかえてみれば、仮定したたわみの関数を板のつり合式にあてはめた場合の誤差関数の2乗を板内部でシンプソン式により数値積分して、最小誤差という条件から解くのと同じ意味をもつ。

**§3. たわみ関数の仮定。** Fig 1のような $i\,j$ 座標系においてたわみを変数 $i$ および $j$ の関数として仮定する際に、$i$ と $j$ の分離した関数形を用いた方が都合がよい。今 $j=const.$ な直線AB上では、$i$ のみの関数として表わせるが、その関数として、cos級数を用い、AおよびBでの固定の条件を考慮すると、

$$W = \sum_{m=2}^{\infty} a_m \left( \cos m\pi i + \delta(m)\cos\pi i - 1 + \delta(m) \right), \quad \delta(m) = \begin{cases} -1 & m=1,3,5 \\ 0 & m=2,4,6 \end{cases}$$

となる。$i=const.$ の場合の $j$ 方向についても同じであるので、結局たわみ関数として、

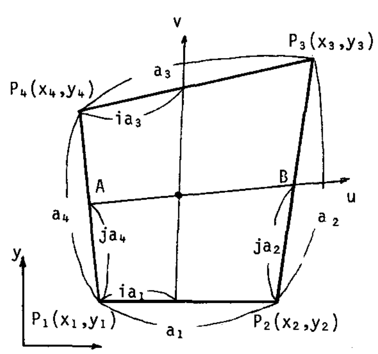

Fig 1

$$w = \sum_{m=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty} C_{mn} \left[ \cos m\pi i + \delta(m)\cos\pi i - 1 + \delta(m) \right]\left[ \cos n\pi j + \delta(n)\cos\pi j - 1 + \delta(n) \right] \quad \text{---(1)}$$

を用いればよい。

**§4. $\Delta\Delta f$ の $i\,j$ 座標系における表現。** $x, y$ 座標系における導函数を、$i\,j$ 座標系の導関数に変換する式は、次のようになる。（前回* の (1), (2), (3)式を参照）

* 倉田宗章，谷平勉「四辺形板の曲げ解析」昭和45年度、関西支部年次学術講演会

$$\begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_{xx} \\ f_{xy} \\ f_{yy} \\ \Delta f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 & 0 & 0 & 0 \\ H_1 & H_2 & 0 & 0 & 0 \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 \\ T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 & Y_5 \\ R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & R_5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \\ f_{ii} \\ f_{ij} \\ f_{jj} \end{Bmatrix}, \quad \cdots (2)$$

ただし

$$\begin{cases} X_1 = \frac{2}{J^2} G_i G_j B_j \\ X_2 = \frac{2}{J^2} G_i G_j B_i \\ X_3 = \frac{1}{J^2} G_j^2 \\ X_4 = -\frac{2}{J^2} G_i G_j \\ X_5 = \frac{1}{J^2} G_i^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} T_1 = -\frac{1}{J^2}(F_i G_j + F_j G_i) B_j \\ T_2 = -\frac{1}{J^2}(F_i G_j + F_j G_i) B_i \\ T_3 = -\frac{1}{J^2} F_j G_j \\ T_4 = \frac{1}{J^2}(F_i G_j + F_j G_i) \\ T_5 = -\frac{1}{J^2} F_i G_j \end{cases}, \quad \begin{cases} Y_1 = \frac{2}{J^2} F_i F_j B_j \\ Y_2 = \frac{2}{J^2} F_i F_j B_i \\ Y_3 = \frac{1}{J^2} F_j^2 \\ Y_4 = -\frac{2}{J^2} F_i F_j \\ Y_5 = \frac{1}{J^2} F_i^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} R_1 = X_1 + Y_1 \\ R_2 = X_2 + Y_2 \\ R_3 = X_3 + Y_3 \\ R_4 = X_4 + Y_4 \\ R_5 = X_5 + Y_5 \end{cases},$$

$$\begin{cases} G_1 = G_j / J \\ G_2 = -G_i / J \\ H_1 = -F_j / J \\ H_2 = F_j / J \end{cases}, \quad \begin{cases} J = F_i G_j - F_j G_i \\ B_i = \frac{1}{J}(F_i G_{ij} - G_i F_{ij}) \\ B_j = \frac{1}{J}(G_j F_{ij} - F_j G_{ij}) \end{cases}, \quad \begin{cases} F_i = \alpha_1 j + \beta_1 \\ F_j = \alpha_1 i + \gamma_1 \\ F_{ij} = \alpha_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} G_i = \alpha_2 j \\ G_j = \alpha_2 i + \gamma_2 \\ G_{ij} = \alpha_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha_1 = x_3 - x_2 + x_1 - x_4 \\ \beta_1 = x_4 - x_1 \\ \gamma_1 = x_2 - x_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha_2 = y_3 - y_2 + y_1 - y_4 \\ \beta_2 = y_4 - y_1 \\ \gamma_2 = y_2 - y_1 \end{cases} \quad \cdots (3)$$

(2)式において $f$ のところに $\Delta f$ を代入すると、

$$\Delta\Delta f = R_1[\Delta f]_i + R_2[\Delta f]_j + R_3[\Delta f]_{ii} + R_4[\Delta f]_{ij} + R_5[\Delta f]_{jj} \quad \cdots (4)$$

ただし

$$\begin{cases} [\Delta f]_i = [R_1]_i f_i + R_1 f_{ii} \\ \qquad + [R_2]_i f_j + R_2 f_{ij} \\ \qquad + [R_3]_i f_{ii} + R_3 f_{iii} \\ \qquad + [R_4]_i f_{ij} + R_4 f_{iij} \\ \qquad + [R_5]_i f_{jj} + R_5 f_{ijj} \end{cases}, \quad \begin{cases} [\Delta f]_j = [R_1]_j f_i + R_1 f_{ij} \\ \qquad + [R_2]_j f_j + R_2 f_{jj} \\ \qquad + [R_3]_j f_{ii} + R_3 f_{iij} \\ \qquad + [R_4]_j f_{ij} + R_4 f_{ijj} \\ \qquad + [R_5]_j f_{jj} + R_5 f_{jjj} \end{cases}, \quad \begin{cases} [\Delta f]_{ii} = [R_1]_{ii} + 2[R_1]_i f_{ii} + R_1 f_{iii} \\ \qquad + [R_2]_{ii} + 2[R_2]_i f_{ij} + R_2 f_{iij} \\ \qquad + [R_3]_{ii} + 2[R_3]_i f_{iii} + R_3 f_{iiii} \\ \qquad + [R_4]_{ii} + 2[R_4]_i f_{iij} + R_4 f_{iiij} \\ \qquad + [R_5]_{ii} + 2[R_5]_i f_{ijj} + R_5 f_{iijj} \end{cases},$$

$$\begin{cases} [\Delta f]_{ij} = [R_1]_{ij} f_i + [R_1]_i f_{ij} + [R_1]_j f_{ii} + R_1 f_{iij} \\ \qquad + [R_2]_{ij} f_j + [R_2]_i f_{jj} + [R_2]_j f_{ji} + R_2 f_{jij} \\ \qquad + [R_3]_{ij} f_{ii} + [R_3]_i f_{iij} + [R_3]_j f_{iii} + R_3 f_{iiij} \\ \qquad + [R_4]_{ij} f_{ij} + [R_4]_i f_{ijj} + [R_4]_j f_{iji} + R_4 f_{ijij} \\ \qquad + [R_5]_{ij} f_{jj} + [R_5]_i f_{jjj} + [R_5]_j f_{jji} + R_5 f_{jjij} \end{cases}, \quad \begin{cases} [\Delta f]_{jj} = [R_1]_{jj} f_i + [R_1]_j f_{ij} + R_1 f_{ijj} \\ \qquad + [R_2]_{jj} f_j + [R_2]_j f_{jj} + R_2 f_{jjj} \\ \qquad + [R_3]_{jj} f_{ii} + [R_3]_j f_{iij} + R_3 f_{iijj} \\ \qquad + [R_4]_{jj} f_{ij} + [R_4]_j f_{ijj} + R_4 f_{ijjj} \\ \qquad + [R_5]_{jj} f_{jj} + [R_5]_j f_{jjj} + R_5 f_{jjjj} \end{cases} \quad \cdots (5)$$

この (5) 式を (4) 式代入して、$f_i, f_j \cdots f_{jjjj}$ についてまとめると、

$$\Delta\Delta f = L_1 f_i + L_2 f_j + L_3 f_{ii} + L_4 f_{ij} + L_5 f_{jj} + L_6 f_{iii} + L_7 f_{iij} + L_8 f_{ijj} + L_9 f_{jjj} + L_{10} f_{iiii} + L_{11} f_{iiij} + L_{12} f_{iijj} + L_{13} f_{ijjj} + L_{14} f_{jjjj} \quad \cdots (6)$$

但し、

$$\begin{cases} L_1 = R_1 \cdot [R_1]_i + R_2 \cdot [R_1]_j + R_3 \cdot [R_1]_{ii} + R_4 \cdot [R_1]_{ij} + R_5 \cdot [R_1]_{jj}, \quad L_2 = R_1 \cdot [R_2]_i + R_2 \cdot [R_2]_j + R_3 [R_2]_{ii} + R_4 [R_2]_{ij} + R_5 [R_2]_{jj} \\ L_3 = R_1 \cdot (R_1 + [R_3]_i) + R_2 \cdot [R_3]_j + R_3 \cdot ([R_3]_{ii} + 2[R_1]_i) + R_4 \cdot ([R_3]_{ij} + [R_1]_j) + R_5 \cdot [R_3]_{jj} \\ L_4 = R_1 \cdot (R_2 + [R_4]_i) + R_2 \cdot (R_1 + [R_4]_j) + R_3 \cdot (2[R_2]_i + [R_4]_{ii}) + R_4 \cdot ([R_1]_i + [R_2]_j + [R_4]_{ij}) + R_5 \cdot (2[R_1]_j + [R_4]_{jj}) \\ L_5 = R_1 [R_5]_i + R_2 (R_2 + [R_5]_j) + R_3 \cdot [R_5]_{ii} + R_4 ([R_2]_i + [R_5]_{ij}) + R_5 (2[R_2]_j + [R_5]_{jj}) \\ L_6 = 2(R_1 \cdot R_3 + R_3 \cdot [R_3]_i) + R_4 \cdot [R_3]_j, \quad L_7 = 2(R_1 \cdot R_4 + R_2 R_3 + R_3 \cdot [R_4]_i + R_5 [R_3]_j) + R_4 ([R_3]_i + [R_4]_j) \\ L_8 = 2(R_1 R_5 + R_2 R_4 + R_3 [R_5]_i + R_5 \cdot [R_4]_j) + R_4 ([R_4]_i + [R_5]_j), \quad L_9 = 2(R_2 R_5 + R_5 \cdot [R_5]_j) + R_4 [R_5]_i \\ L_{10} = R_3^2, \quad L_{11} = 2R_3 R_4, \quad L_{12} = 2R_3 R_5 + R_4^2, \quad L_{13} = 2R_4 R_5, \quad L_{14} = R_5^2 \end{cases} \quad \cdots (7)$$

$$
\begin{aligned}
&[R_1]_i=\frac{B_j}{J^2}(g_4-3g_1B_i), && [R_2]_i=\frac{B_i}{J^2}(g_4-3g_1B_i), && [R_3]_i=\frac{1}{J^2}(g_5-2g_2B_i),\\
&[R_1]_j=\frac{B_j}{J^2}(g_5-3g_1B_j), && [R_2]_j=\frac{B_i}{J^2}(g_5-3g_1B_j), && [R_3]_j=-\frac{1}{J^2}g_2B_j,\\
&[R_1]_{ii}=-\frac{6B_iB_j}{J^2}(g_4-2g_1B_i), && [R_2]_{ii}=-\frac{6B_i^2}{J^2}(g_4-2g_1B_i), && [R_3]_{ii}=\frac{1}{J^2}(g_6-4g_5B_i+6g_2B_i^2),\\
&[R_1]_{ij}=\frac{B_j}{J^2}(g_6-3g_4B_j-3g_5B_i+12g_1B_iB_j), && [R_2]_{ij}=\frac{B_i}{J^2}(g_6-3g_4B_j-3g_5B_i+12g_1B_iB_j), && [R_3]_{ij}=-\frac{2}{J^2}B_j(g_5-3g_2B_i),\\
&[R_1]_{jj}=-\frac{6B_j^2}{J^2}(g_5-2g_1B_j), && [R_2]_{jj}=-\frac{6B_iB_j}{J^2}(g_5-2g_1B_j), && [R_3]_{jj}=\frac{2}{J^2}B_j\cdot 3g_2B_j,
\end{aligned}
\qquad \text{--- (8)}
$$

$$
\begin{aligned}
&[R_4]_i=-\frac{1}{J^2}(g_4-2g_1B_i), && [R_5]_i=-\frac{2}{J^2}g_3B_i, && g_1=2(G_iG_j+F_iF_j),\\
&[R_4]_j=-\frac{1}{J^2}(g_5-2g_1B_j), && [R_5]_j=\frac{1}{J^2}(g_4-2g_3B_j), && g_2=G_j^2+F_j^2,\\
&[R_4]_{ii}=\frac{2B_i}{J^2}(2g_4-3g_1B_i), && [R_5]_{ii}=\frac{6}{J^2}g_2B_i^2, && g_3=G_i^2+F_i^2,\\
&[R_4]_{ij}=-\frac{1}{J^2}(g_6-2g_4B_j-2g_5B_i+6g_1B_iB_j), && [R_5]_{ij}=-\frac{2}{J^2}B_i(g_4-3g_3B_j), && g_4=2(G_iG_{ij}+F_iF_{ij}),\\
&[R_4]_{jj}=\frac{2B_j}{J^2}(2g_5-3g_1B_j), && [R_5]_{jj}=\frac{1}{J^2}(g_6-4g_4B_j+6g_3B_j^2), && g_5=2(G_jG_{ij}+F_jF_{ij}),\\
& && && g_6=2(G_{ij}^2+F_{ij}^2)
\end{aligned}
$$

(1)式において、
$$
\begin{cases} U=\cos m\pi i+\delta(m)\cos\pi i-1+\delta(m)\\ V=\cos n\pi j+\delta(n)\cos\pi j-1+\delta(n)\end{cases} \quad \text{---(9)}
$$
とおくと
$$
W=\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}C_{mn}UV \quad \text{---(10)}
$$
と書ける。

## §5 等厚板のつり合式。

(10)式の逐次導関数を計算したものを書くと、

$$
\begin{aligned}
&W_i=\sum\sum C_{mn}U_iV, \quad W_j=\sum\sum C_{mn}UV_j, \quad W_{ii}=\sum\sum C_{mn}U_{ii}V, \quad W_{ij}=\sum\sum C_{mn}U_iV_j, \quad W_{jj}=\sum\sum C_{mn}UV_{jj},\\
&W_{iii}=\sum\sum C_{mn}U_{iii}V, \quad W_{iij}=\sum\sum C_{mn}U_{ii}V_j, \quad W_{ijj}=\sum\sum C_{mn}U_iV_{jj}, \quad W_{jjj}=\sum\sum C_{mn}UV_{jjj}, \quad W_{iiii}=\sum\sum C_{mn}U_{iiii}V,\\
&W_{iiij}=\sum\sum C_{mn}U_{iii}V_j, \quad W_{iijj}=\sum\sum C_{mn}U_{ii}V_{jj}, \quad W_{ijjj}=\sum\sum C_{mn}U_iV_{jjj}, \quad W_{jjjj}=\sum\sum C_{mn}UV_{jjjj},
\end{aligned}
\quad \text{--- (11)}
$$

これを(6)式にあてはめると、

$$
\Delta\Delta W=\sum_{m=2}^{\infty}\sum C_{mn}\left\{\begin{aligned}&L_1U_iV+L_2UV_j+L_3U_{ii}V+L_4U_iV_j+L_5UV_{jj}+L_6U_{iii}V+L_7U_{ii}V_j\\&+L_8U_iV_{jj}+L_9UV_{jjj}+L_{10}U_{iiii}V+L_{11}U_{iii}V_j+L_{12}U_{ii}V_{jj}+L_{13}U_iV_{jjj}+L_{14}UV_{jjjj}\end{aligned}\right\}=q/D \quad \text{---(12)}
$$

ただし、

$$
\begin{aligned}
&U_i=-m\pi\sin m\pi i-\pi\delta(m)\sin\pi i, && V_j=-n\pi\sin n\pi j-\pi\delta(n)\sin\pi j,\\
&U_{ii}=-m^2\pi^2\cos m\pi i-\pi^2\delta(m)\cos\pi i, && V_{jj}=-n^2\pi^2\cos n\pi j-\pi^2\delta(n)\cos\pi j,\\
&U_{iii}=m^3\pi^3\sin m\pi i+\pi^3\delta(m)\sin\pi i, && V_{jjj}=n^3\pi^3\sin n\pi j+\pi^3\delta(n)\sin\pi j,\\
&U_{iiii}=m^4\pi^4\cos m\pi i+\pi^4\delta(m)\cos\pi i, && V_{jjjj}=n^4\pi^4\cos n\pi j+\pi^4\delta(n)\cos\pi j.
\end{aligned}
\quad \text{---(13)}
$$

## §6. 変厚板のつり合式。

変厚板のつり合式は、

$$
D\Delta\Delta W+2\frac{\partial D}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\Delta W+2\frac{\partial D}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\Delta W+\Delta D\Delta W-(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 D}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right]=q \quad \text{---(14)}
$$

(2)式より
$$
\begin{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\Delta f\\ \frac{\partial}{\partial y}\Delta f\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}G_1 & G_2\\ H_1 & H_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}[\Delta f]_i\\ [\Delta f]_j\end{Bmatrix}
$$
とかける。$[\Delta f]_i$, $[\Delta f]_j$ は(5)式より与えられるのでこれらをまとめると、

$$
\begin{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\Delta f\\ \frac{\partial}{\partial y}\Delta f\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}G_1 & G_2\\ H_1 & H_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}[R_1]_i & [R_2]_i & (R_1+[R_3]_i) & (R_2+[R_4]_i) & [R_5]_i & R_3 & R_4 & R_5 & 0\\ [R_1]_j & [R_2]_j & [R_3]_j & (R_1+[R_4]_j) & (R_2+[R_5]_j) & 0 & R_3 & R_4 & R_5\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}f_i\\ f_j\\ f_{ii}\\ f_{ij}\\ f_{jj}\\ f_{iii}\\ f_{iij}\\ f_{ijj}\\ f_{jjj}\end{Bmatrix} \quad \text{--(15)}
$$

(14)式の第1項は(12)式より、第2,3項は(15)式より、第4,5項は、(2)式より変形できるから、結局(11)の各式を用いて(12)式と同様な形にまとめることができる。

**§7. 計算手順。** (2)式で仮定した2重級数の係数は、一般的に(M,N)項とした場合、(M+N)の増加と共に係数の値は漸減するので、有限項をとって計算する場合、短形的に $C_{mn}$ をとるよりも、Fig2のように3角形的にとった方が有利である。今、つり合式に対する誤差を $\varepsilon$ とし(例えば、等厚板の場合 $\Delta\Delta w - q/D = \varepsilon$)誤差の2乗和 $\int_A \varepsilon^2$ を $S$ とする。最小2乗法は $\frac{\partial S}{\partial C_{mn}} = 0$ から $C_{mn}$ の個数だけの式がつくれ、これを連立方程式として解く。$S$ を数値的に計算するためには、板の相対する辺を等分する点を結んでできる網目の各点での $\varepsilon^2$ を計算してその和を求める。本計算では Fig 2 で $M$ と $N$ の個数を同じにし $(M+1)M/2$ 個の未知数を定めるために、板の一辺を $(M+1)$ 等分するような網目を作り、合計 $M^2$ 個の式を作った。

$$
\begin{array}{cl}
 & \quad\quad\quad\quad M \\
 & C_{11}\ C_{12}\ C_{13}\ C\ \ C\ \ C\ \ C_{1m} \\
 & C_{21}\ C_{22}\ C\ \ C\ \ C\ \ C \\
 & C_{31}\ C\ \ C\ \ C\ \ C \\
N & C\ \ C\ \ C\ \ C \\
 & C\ \ C\ \ C \\
 & C\ \ C \\
 & C_{n1}
\end{array}
$$

Fig.2

**§8. 数値計算例。** 前回の全周単純支持の場合と同様に $M$ を増加させた場合の収束性をしらべ、他の解と比較するため、正方形の場合について計算した。ポアソン比 0.3、等厚板の場合。

Table 1

| M | 元数 | center deflexion | | center $M_x$ | | edge $M_x$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 15 | 0.001263 | 0.3 | 0.02273 | 1.6 | 0.03689 | 28.1 |
| 7 | 28 | 0.001286 | 2.1 | 0.02370 | 2.6 | 0.04079 | 20.2 |
| 9 | 45 | 0.001284 | 1.9 | 0.02335 | 1.1 | 0.04310 | 16.0 |
| 11 | 66 | C.001279 | 1.5 | 0.02331 | 0.9 | 0.04441 | 13.4 |
| 13 | 91 | 0.001271 | 0.9 | 0.02311 | 0.5 | 0.04523 | 11.8 |
| Timos. | | 0.00126 | | 0.0231 | | 0.0513 | |

Table 2

| M | 元数 | center deflexion | | center $M_x$ | | edge $M_x$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 15 | 0.001550 | | 0.02365 | | 0.03820 | |
| 7 | 28 | 0.001609 | 3.7 | 0.02497 | 5.3 | 0.04297 | 11.0 |
| 9 | 45 | 0.001646 | 2.3 | 0.02543 | 1.9 | 0.04604 | 6.7 |
| 11 | 66 | 0.001672 | 1.6 | 0.02578 | 1.4 | 0.04815 | 4.4 |
| 13 | 91 | 0.001688 | 1.0 | 0.02608 | 1.1 | 0.04959 | 2.9 |

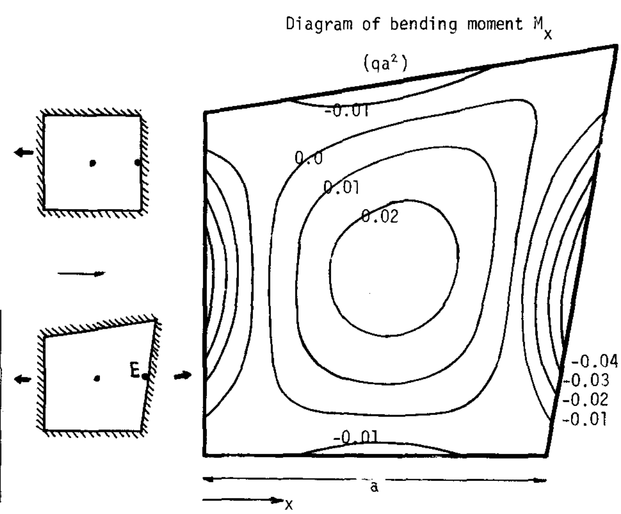


Fig. 3

**§9. あとがき。** 全周固定の場合においても、前回の全周単純支持の場合と同様に、たわみ、および中央点の曲げモーメントに関しては、十分実用的な解がえられたが、固定辺における曲げモーメントの収束性が悪く、この現象の要因として考えられることは、固定の境界条件を満足するたわみの関数は、cosine級数であるので、2回微分して、曲げモーメントを計算しても、やはりcosine関数であり、固定辺で曲げモーメントの変化率が0となってしまう。ところが実際の曲げモーメントは、梁の場合と同様に、かなりの変化率をもつものと考えられるので、たわみをcosine関数で仮定するのは、曲げモーメントに対する、表現能力としてはかなり不利である。この点について、改良する余地があるようである。

ともかく、前回用いた、板内選点法と、今回の最小2乗法を結合させた解法を用いることによって満足すべき結果がえられた。