

I-92 固有函数法による複合板の解析

信州大学 各本勉之助 夏目正太郎
福山コンサルタント 小川泰造

1. 概要

固有函数法は幅広い展開がなされ、種々の解法が試みられてきたが、解析の複雑さのため簡便な解法も生まれていない。このような方法は固有函数法の長所である境界条件の任意性、急速な収束を要している点に注目される。本研究で扱う複合された板の問題等に関しては対処する方法がないように思われる。その理由として函数近似に用いる級数の収束が悪く、実数部の分離による解析の複雑さが挙げられる。このような問題を解決するために函数近似には Neumann Expansion を用いて複素量のまま演算手法を用いて解析の簡素化を計る。複合板構造の解析を以下に示す：

2. 解析

平面応力問題における基本微分方程式は応力函数 χ を用いて

$$\frac{\partial^4 \chi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \chi}{\partial y^4} = 0, \quad (1)$$

で表わされる。図-1 に示す系に対して応力函数を

$$\chi = \chi_h + \chi_p \quad (2)$$

の和の形で与えると、一様分布荷重満載の場合

$$\chi_p = \frac{q a^2}{40} [\rho^5 - 5(\rho^3 - 3\rho + 2) \frac{y^2}{a^2}] \quad (3)$$

であり

$$\chi_h = \sum_n \frac{a^2}{\lambda_n^2} L \cos \lambda_p, \sin \lambda_p, \lambda_p \cos \lambda_p, \lambda_p \sin \lambda_p \Big| N \begin{bmatrix} \frac{d \lambda_p}{d \lambda} \\ \frac{d \lambda_p}{d \lambda} \end{bmatrix}_n \quad (\rho = \frac{x}{a}) \quad (4)$$

となる。ここに λ_n は n 次の固有値、 N_n は n 次の固有マトリクス（未知定数群）である。 λ_n 及び χ_p を求めるには式(5)の境界条件式により式(6)の固有値方程式を解く（表-1）。

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_{x=-a} = \begin{bmatrix} -q \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_{x=a} = 0. \quad (5) \quad 2\lambda + \sin 2\lambda = 0, \quad 2\lambda' - \sin 2\lambda' = 0. \quad (6)$$

板①、②での結合状態ベクトルは4次の柱ベクトルで示され

$$W(x, y) = \{ u, v, \sigma_y, \tau_{xy} \} \\ = \sum_n [X(x) \cdot Y(y) C + X'(x) \cdot Y'(y) C']_n + W_p(x, y) + F(x, y) R, \quad (7)$$

更に Neumann Ex. により

$$W(x, y) = \sum_n \sum_m P_m(\rho) L a_{mn} \cdot Y_n(y), a'_{mn} \cdot Y'_n(y) \begin{Bmatrix} C_n \\ C'_n \end{Bmatrix} + \sum_m P_m(\rho) f_m; \quad (8)$$

$W(x, y)$ は結合状態ベクトル, $w_p(x, y)$ は特解の状態ベクトル, R は剛体変位に関する未知数群であり, $P_m(p)$ は m 次の Legendre 函数, a_{mn} , f_m は Neumann 係数である。

表-2 に示すごとく 式(7) の展開は多項式型である Neumann Ex. の方が 波型である Fourier Ex. よりも収束が速い。この点は曲げ問題においても共通であり 平面応力問題においても是通りに収束が速い。Neumann Ex. を用いる重要な点は 階段函数で与えられるような荷重状態でも 数項で厳密に近似し得ることである。

n	$\lambda_n = \alpha_n + i\beta_n$		$\lambda'_n = \alpha'_n + i\beta'_n$	
1	2.106196	1.125365	3.748838	1.384339
2	5.356269	1.551575	6.949980	1.676105
3	8.536683	1.775544	10.119259	1.858384
4	11.699178	1.929445	13.277274	1.991571
5	14.854060	2.046853	16.429872	2.096626
6	18.004933	2.141891	19.579409	2.183398

板①, ② での結合条件は

$$W_1(x, b_1) = W_2(x, 0), \quad (9)$$

また

$$[A_{mn}]_b \{F_n\}_1 + \{f_{m,b_1}\}_1 = [A_{mn}]_0 \{F_n\}_2 + \{f_{m,0}\}_2, \quad \text{表-1. 固有値} \quad (10a)$$

$$\{F_n\}_2 = \mathbb{L} \{F_n\}_1 + \mathbb{H} [\{f_{m,b_1}\}_1 - \{f_{m,0}\}_2], \quad (\mathbb{L} = [A_{mn}]_0^{-1} [A_{mn}]_b, \quad \mathbb{H} = [A_{mn}]_0^{-1}) \quad (10b)$$

であり, ここに $\{F_n\}$ は新しい未知定数群である。

境界条件は 式(11) または 式(12) で示され:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_{1, y=0} = 0, \quad \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_{2, y=b_2} = 0, \quad (11) \quad B\{F_n\}_1 + B\{f_{m,0}\}_1 = 0, \quad B'\{F_n\}_2 + B'\{f_{m,b_2}\}_2 = 0. \quad (12)$$

となり, 式(10b), (12) より最終式を得る:

$$\{F_n\}_1 = - \begin{bmatrix} B \\ B'\mathbb{L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & B'\mathbb{H}, & -B'\mathbb{H}, & B' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{f_{m,0}\}_1 \\ \{f_{m,b_1}\}_1 \\ \{f_{m,0}\}_2 \\ \{f_{m,b_2}\}_2 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

$a_{mn} = \{a, b, c, d\}_{mn} \quad \rho = 0.5$
Neumann Fourier

	$\sum_{m=1,3,5,7,9} (a_{m1})$	$\sum_{m=0,1,3,5,7} (a_{m1})$
1	-6.5866×10^{-7}	
3	-8.5379×10^{-7}	
5	-8.6137×10^{-7}	
7	-8.6065×10^{-7}	-8.2338×10^{-7}
9	-8.6067×10^{-7}	
厳密値		-8.6067×10^{-7}

3. 結論

演算子法手法による解析の簡単化及び Neumann Ex. を用いることにより 過去に不可能と考えられていた 面内応力, 曲げ問題の合成された板構造 (例えば Box Girder) への固有函数の発展が充分期待でき, 固有函数法の応用範囲が拡張し得たものと考えられる。

4. 参考文献

- 1) Tanimoto, B. "Bending Analysis for Clamped Rectangular Plates, by L. R. Herrmann" Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 90, No. EM6, Dec. 1964
- 2) 小川, 各本, 夏目 "固有函数法による板の解析" 土木学会中部支部 研究発表会講演概要集 B370 号 2月 20日

表-2. 函数近似