

I-91 固有函数法による板の解析

信州大学 学生員・中原実 小沢公英
正員 各本名又助 夏目正太郎

1. 序文

板の曲げ解析において一般には変調和函数を Fourier Expansion により展開し無限級数近似により解かれ、この間知らずとく曲げモーメント、せん断力に關しては極めて収束が悪い。本研究では急速収束の期待が出来る固有函数法を用いて任意境界条件(混合境界値)を有する板の曲げ問題を Neumann Expansion を用いて検討してみた。

固有函数法は、変数と複素量とを不定積分定数と倍に増加させ、任意の境界条件と取り込む解析法で、1960年以來 (Rapkóvitsch) 種々の論文が提出されている。

2. 解析

板の曲げ基本微分方程式は

$$\nabla^4 w = \frac{q}{D}, \quad (1)$$

と与えられる。図-1. の場合(自由-固定の条件)の境界条件は

$$\begin{bmatrix} w \\ \theta \end{bmatrix}_{x=a} = 0, \begin{bmatrix} M_x \\ S_x \end{bmatrix}_{x=-a} = 0; \begin{bmatrix} w \\ \theta \end{bmatrix}_{y=0} = 0, \begin{bmatrix} M_y \\ S_y \end{bmatrix}_{y=b} = 0, \quad (2)$$

である。一般に w を次のようにかく

$$w = w_h + w_p, \quad (3)$$

これぞれの函数は次式を満足する:

$$\nabla^4 w_h = 0, \quad \nabla^4 w_p = \frac{q}{D}. \quad (4)$$

式(4)の解を

$$\left. \begin{aligned} w_h &= \sum_n L \cos \lambda p, \sin \lambda p, \lambda p \cos \lambda p, \lambda p \sin \lambda p \cdot \overline{M} \begin{bmatrix} \frac{d^2 \Delta y}{a^2} \\ \frac{d^2 \Delta y}{a^2} \end{bmatrix}_n, \quad p = \frac{x}{a} \\ w_p &= L \{ 1, x, x^2, x^3 \} \cdot \overline{M} \{ 1, y, y^2, y^3 \}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

と置く。 $\overline{M}$ は不定積分定数群である。

式(2-1)に(5-1)を代入すれば、変数 λ に關する固有値方程式と新しい不定積分定数群 Ω_n が導かれる (V: ポリノム)

$$\frac{3+V}{1-V} \sin^2 2\lambda_n + (2\lambda_n)^2 - \left(\frac{2}{1-V} \right)^2 = 0, \quad \overline{M}_n = P(\lambda_n) \Omega_n, \quad (6)$$

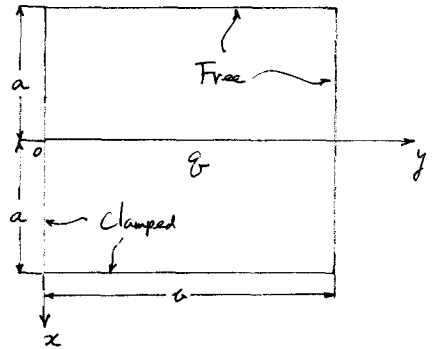


図-1. 系

式(5-2)も(2-1)の条件により

$$W_p = \frac{b}{24D} [1, x, x^2, x^3, x^4] \{17a^4, -28a^3, 6a^2, 4a, 1\}. \quad (7)$$

式(5), (7)をNeumann展開すると状態ベクトル $W_k(\omega, \theta, M, S_j)$, W_p は

$$W_k = \sum_m \sum_n P_m(\rho) a_{mn} \cdot Y_n(y), \quad W_p = \sum_m P_m(\rho) \phi_m, \quad (8)$$

と書かれる。この場合 W_p に関して $m=0, 1, 2, 3, 4$ までで厳密に近似する。

式(2-2)の境界条件を式(8)に用いると

$$\begin{bmatrix} a_{mn} \cdot Y(0) \\ a_{mn} \cdot Y(b) \end{bmatrix}_n \{\Omega_n\} = - \begin{Bmatrix} \phi_{mn} \\ \phi'_{mn} \end{Bmatrix}, \quad (9)$$

となり逆マトリクスを求めることにより Ω_n が決定する。

各種の境界条件に関する固有値方程式は表-1に示される；

表-1. $W_p(\lambda)$ の固有値方程式

$$k = \frac{z}{1-\nu} \quad m = \frac{j+\nu}{1-\nu}$$

	Clamped	Simple	Free
Clamped	$\sin 2\lambda + 2\lambda = 0, \quad \sin 2\lambda' - 2\lambda' = 0$ $\begin{bmatrix} 0 \\ -\cos^3 \lambda \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \sin^2 \lambda' \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\sin 4\lambda - 4\lambda = 0$ $\begin{bmatrix} \lambda \sin \lambda (\cos \lambda \sin \lambda - \lambda) \\ -\lambda \cos \lambda (\cos \lambda \sin \lambda + \lambda) \\ \sin \lambda (\cos \lambda \sin \lambda + \lambda) \\ -\cos \lambda (\cos \lambda \sin \lambda - \lambda) \end{bmatrix}$	$m \sin^2 2\lambda + (2\lambda)^2 - (2k)^2 = 0$ $\begin{bmatrix} -(k+1)\lambda \sin \lambda - \lambda \cos \lambda (\cos \lambda \sin \lambda - \lambda) \\ + \cos \lambda \sin \lambda (\cos^2 \lambda - \sin^2 \lambda) \\ -(k-1)\lambda \cos \lambda + \lambda \sin \lambda (\cos \lambda \sin \lambda + \lambda) \\ - \cos \lambda \sin \lambda (\cos^2 \lambda - \sin^2 \lambda) \\ \cos \lambda (\cos \lambda \sin \lambda - \lambda) - k \sin \lambda \\ -\sin \lambda (\cos \lambda \sin \lambda + \lambda) + k \cos \lambda \end{bmatrix}$
Simple	$\sin 4\lambda - 4\lambda = 0$ $\begin{bmatrix} \lambda \sin^2 \lambda \\ \lambda \cos^2 \lambda \\ -\cos^3 \lambda \sin \lambda \\ -\cos \lambda \sin^2 \lambda \end{bmatrix}$	$\sin 2\lambda = 0$ この場合は必然的に一般の Fourier 級数解析になる。	$m \sin^2 4\lambda + 4\lambda = 0$ $\begin{bmatrix} \lambda \cos \lambda (2k \sin \lambda + \lambda \cos \lambda) \\ -\lambda \sin^2 \lambda (2k \cos \lambda - \lambda \sin \lambda) \\ -2k \cos^2 \lambda \sin \lambda - \lambda \cos^2 \lambda (\cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda) \\ -2k \cos \lambda \sin \lambda (\cos^2 \lambda - \sin^2 \lambda) - \lambda \sin \lambda (1 - 2 \cos^2 \lambda) \end{bmatrix}$
Free	$m \sin^2 2\lambda + (2\lambda)^2 - (2k)^2 = 0$ $\begin{bmatrix} \sin \lambda (m \sin^2 \lambda - 2k) (m \cos \lambda \sin \lambda - \lambda) \\ - \cos \lambda (m \cos \lambda \sin \lambda + \lambda) \\ \cos \lambda (m \cos^2 \lambda - 2k) (m \cos \lambda \sin \lambda + \lambda) \\ - \sin \lambda (m \cos \lambda \sin \lambda - \lambda) \\ \cos \lambda (m \cos \lambda \sin \lambda + \lambda) \\ - \sin \lambda (m \cos \lambda \sin \lambda - \lambda) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2k \cos \lambda - \lambda \sin \lambda \\ -2k \sin \lambda + \lambda \cos \lambda \\ \sin \lambda \\ -\cos \lambda \end{bmatrix}$	$m \sin^2 2\lambda + 2\lambda = 0, \quad m \sin 2\lambda' - 2\lambda' = 0$ $\begin{bmatrix} 2k - m \sin^2 \lambda \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -2k + m \cos^2 \lambda' \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

3. 参考文献

小川泰造, 河原勇, 谷本勉之助, 夏田正太郎 “固有函数法による板の解析” 中部支部研究発表会講演概要集 1970年2月