

○ 東北大学 正員 倉田 茂
東北大学 正員 矢吹 哲也

本論文は鋼アーチの耐荷力を、有限変形および材料の降伏を考慮して求めたものである。有限変形の影響は逐次近似法により、塑性変形の影響は曲げ剛性および有効断面の減少と換算し、同じく逐次近似法により計算している。アーチの変形はすべて普通の弾性計算に用いられている式が利用できるので、本方法によれば、弾性計算と強い関連性をもって、有限変形および塑性変形の影響を論ずることができる。また多くのはり・柱となっている構造物の各部材に本方法を適用し全体としての耐荷力をマトリックス法との組合せで求める事ができる。

1- 一次計算

右図に示したようなアーチに働く力および変形はよく知られているように次式で表えられる。

$$\bar{M}_0 = \sum_{k=1}^n (1 - \bar{x}_k) P_k \bar{x} - \sum_{k=1}^n \text{Step}_{\bar{x}}^{\bar{x}_k} (\bar{x} - \bar{x}_k) \quad \dots (1)$$

$$H = \frac{\int_0^1 \frac{\bar{M}_0 \bar{x}}{\mu k \sin^3 \bar{\theta}} d\bar{x}}{\beta} \quad \dots (2)$$

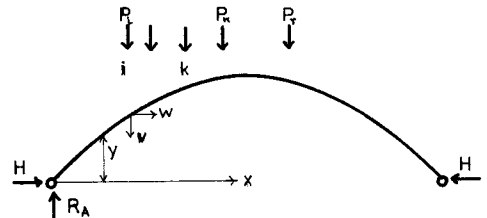


図-1

ここで $\bar{x}$ はスパン l で割った値を表し、 $\beta = \int_0^1 \left\{ \frac{(\bar{x})^2}{\mu k \sin^3 \bar{\theta}} + \frac{1}{\nu \lambda^2 \sin^3 \bar{\theta}} \right\} d\bar{x}$ である。

また $\bar{M}_{0k} = \bar{M}_0 - H \bar{x}$, $\bar{M}_{0k} = (1 - \bar{x}_k) \bar{x} - \text{Step}_{\bar{x}}^{\bar{x}_k} (\bar{x} - \bar{x}_k)$,

$\bar{M}_{0wk} = -\{ \bar{x}_k \bar{x} + \text{Step}_{\bar{x}}^{\bar{x}_k} (\bar{x} - \bar{x}_k) \}$ とすれば

$$H_k = \left\{ \int_0^1 \frac{\bar{M}_{0k} \bar{x}}{\mu k \sin^3 \bar{\theta}} d\bar{x} \right\} / \beta , \quad H_{wk} = \left\{ \int_0^1 \frac{\bar{M}_{0wk} \bar{x}}{\mu k \sin^3 \bar{\theta}} d\bar{x} - \int_0^1 \frac{\text{Step}_{\bar{x}}^{\bar{x}_k}}{\nu \lambda^2 \sin^3 \bar{\theta}} d\bar{x} \right\} / \beta \quad \dots (3)$$

より変位はそれぞれ

$$\bar{v}_k = \left(\frac{l^2}{EI_c} \right) \left\{ \int_0^1 \frac{\bar{M} (\bar{M}_{0k} - H_k \bar{x})}{\mu k \sin^3 \bar{\theta}} + \frac{H \cdot H_k}{\nu \lambda^2 \sin^3 \bar{\theta}} \right\} d\bar{x} \quad \dots (4)$$

$$\bar{w}_k = \left(\frac{l^2}{EI_c} \right) \left\{ \int_0^1 \frac{\bar{M} (\bar{M}_{0wk} - H_{wk} \bar{x})}{\mu k \sin^3 \bar{\theta}} + \frac{H (H_{wk} + \text{Step}_{\bar{x}}^{\bar{x}_k})}{\nu \lambda^2 \sin^3 \bar{\theta}} \right\} d\bar{x} \quad \dots (5)$$

ここで k はある標準の断面二次モーメント I_c との比 I/I_c であり、 μ , ν はそれぞれ塑性変形による曲げ剛性および有効断面積の低下率を表わす。

2- 2次計算

ある逐次近似の段階 $n-1$ での力および変形状態より求められた力および変形の増加分 Δ を附し、それぞれの段階数 n の肩に附して記せば、段階 n でのアーチ軸線、変形量および力

$$\begin{aligned} \bar{x}^n &= \bar{x}^{n-1} + \Delta \bar{x}^{n-1}, & \bar{r}^n &= \bar{r}^{n-1} + \Delta \bar{r}^{n-1}, & w^n &= w^{n-1} + \Delta w^{n-1} \\ \nu^n &= \nu^{n-1} + \Delta \nu^{n-1}, & H^n &= H^{n-1} + \Delta H^{n-1}, & R_A^n &= R_A^{n-1} + \Delta R_A^{n-1}, & \bar{r}^n &= \bar{r}^{n-1} + \Delta \bar{r}^{n-1} \end{aligned} \quad \dots (6)$$

で書き表わされる。それぞれ量は

$$\Delta R_A^k = - \sum_{k=1}^r P_k \cdot \Delta W_k^{k-1}$$

$$\Delta M_{0k} = H^{k-1} \Delta U_k^{k-1} + (\Delta R_A^k \bar{z}_k^k + R_A^{k-1} \Delta W_k^{k-1}) - \sum_{i=1}^k P_i (\Delta W_k^{k-1} - \Delta W_i^{k-1})$$

$$\Delta H^k = \frac{\int_0^1 \frac{\bar{z}^k}{\mu k \sin^2 \gamma^k} \Delta M_{0k} d\bar{z}}{\int_0^1 \left\{ \frac{(\bar{z}^k)^2}{\mu k \sin^2 \gamma^k} + \frac{1}{\nu \lambda^2 \sin^2 \gamma^k} \right\} d\bar{z}}$$

$$\Delta \bar{M}_k^k = \Delta M_{0k}^k - \Delta H^k \bar{z}_k^k$$

$$\bar{M}_{0k}^k = (1 - \bar{z}_k^k) \bar{z}_k^k - \text{step}_x^k (\bar{z}_k^k - \bar{z}_k^k)$$

$$\bar{M}_{0wk} = - \{ \bar{z}_k^k \bar{z}_k^k + \text{step}_x^k (\bar{z}_k^{k-1} - \bar{z}_k^{k-1}) \}$$

$$\bar{H}_k^k = \frac{\int_0^1 \frac{\bar{M}_{0k}^k \bar{z}_k^k}{\mu k \sin^2 \gamma^k} d\bar{z}}{\int_0^1 \left\{ \frac{(\bar{z}^k)^2}{\mu k \sin^2 \gamma^k} + \frac{1}{\nu \lambda^2 \sin^2 \gamma^k} \right\} d\bar{z}}$$

$$\bar{M}_k^k = \bar{M}_{0k}^k - H_k^k \bar{z}_k^k$$

$$H_{wk}^k = \frac{\int_0^1 \left\{ \frac{\bar{M}_{0wk}^k \bar{z}_k^k}{\mu k \sin^2 \gamma^k} - \frac{\text{step}_x^k}{\nu \lambda^2 \sin^2 \gamma^k} \right\} d\bar{z}}{\int_0^1 \left\{ \frac{(\bar{z}^k)^2}{\mu k \sin^2 \gamma^k} + \frac{1}{\nu \lambda^2 \sin^2 \gamma^k} \right\} d\bar{z}}$$

$$\bar{M}_{wk}^k = \bar{M}_{0wk}^k - H_{wk}^k \bar{z}_k^k$$

$$\Delta \bar{U}_k^k = \left(\frac{b^2}{E I_0} \right) \int_0^1 \left\{ \frac{1}{\mu k \sin^2 \gamma^k} \Delta \bar{M}_k^k \bar{M}_k^k + \frac{\Delta H^k H_k^k}{\nu \lambda^2 \sin^2 \gamma^k} \right\} d\bar{z}$$

$$\Delta \bar{W}_k^k = \left(\frac{b^4}{E I_0} \right) \int_0^1 \left\{ \frac{1}{\mu k \sin^2 \gamma^k} \Delta \bar{M}_k^k \bar{M}_{wk}^k + \frac{\Delta H^k (H_{wk}^k + \text{step}_x^k)}{\nu \lambda^2 \sin^2 \gamma^k} \right\} d\bar{z}$$

で表わされる。これ等の繰り返し分が充分に小さくなるまで逐次近似計算を繰り返す。

3-塑性変形による曲げ剛性および有効断面積の低下率の計算

本論文では、曲げと軸力に対する抵抗力に対し、両極端の性質を有するものと思われなく型断面のもの、サードウィッチ断面のものについて計算を行う。

3-1 <形断面に対する曲げ剛性および有効断面積の低下率の計算

図-2に示したよう、3つの応力状態に分けて

それぞれの低下率を考える。

応力-歪曲線は図-3に示したように、理想弾塑性体のものとする。すると状態Iでは全断面が弾性域にある事を表わし、状態IIは一方側に塑性変形が生じた場合を示し、状態IIIは両側に塑性域が現れしと事を示す。

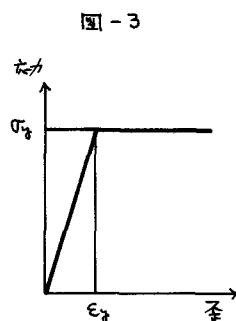


図-3

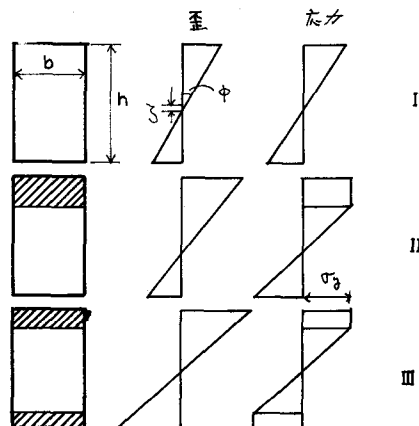


図-2

それぞれの状態は

$$M_g = \frac{bh^2\sigma_g}{6}, \quad N_g = bh\sigma_g$$

といて、状態Ⅰ, $0 \leq M/M_g \leq 1 - N/N_g$

状態Ⅱ, $1 - N/N_g < M/M_g \leq (1 + 2N/N_g)(1 - N/N_g)$

状態Ⅲ, $(1 + 2N/N_g)(1 - N/N_g) < M/M_g \leq 2\{1 - (N/N_g)^2\}^{1/3}$

(8)

応力状態より定められる。すると純曲げにより、最速のファイバー応力が降伏するとその断面の回転の変化率を ϕ_g , ζ を断面中央より中立軸までの距離といて、断面の回転の変化率中と ζ は次式で表えられる。

状態Ⅰ $\phi/\phi_g = M/M_g, \quad \zeta = \frac{N}{2N_g} \frac{\phi_g}{\phi}$

状態Ⅱ $\phi/\phi_g = \frac{4(1 - N/N_g)^3}{\{3(1 - N/N_g) - M/M_g\}^2}, \quad \zeta = \frac{1}{2}(1 + \frac{\phi_g}{\phi}) - \sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{1 - N/N_g}$

状態Ⅲ $\phi/\phi_g = \frac{1}{\sqrt{3(1 - (N/N_g)^2) - 2M/M_g}}, \quad \zeta = \frac{1}{2} \frac{N}{N_g}$

(9)

すると塑性変形による曲げ剛性の低下率 μ と有効断面積の低下率 ν はそれぞれ次式で表えられる。

$$\mu = \frac{M}{M_g} \frac{\phi_g}{\phi}, \quad \nu = \frac{1}{2\zeta} \frac{N}{N_g} \frac{\phi_g}{\phi} \quad (10)$$

3-2 サンドウィッチ断面に対する曲げ剛性および有効断面積の低下率の計算

サンドウィッチ断面に対しては、溶接による殘留応力および歪硬化の影響も考える。すなわち図-4に示したような殘留応力分布を仮定し、歪歪硬化は $(\epsilon_y + \epsilon_n)$ の点より始まるとして計算を行なう。歪硬化の始まる歪は実際の場合より、小さく仮定することになるが、適当な E を選ぶ事によりウエブの影響もある程度入れる事も可能になる。本論文の目的はあるアーチの耐荷力を求めるという事より、アーチの設計に対する規準を求める事にあつて、上記の仮定に充分と思われる。く形の断面の場合と同様に、応力状態によって6つの状態が考えられ、さらに、両フランクの応力が等符号か異符号によってそれぞれの状態は2つに分かれる。前者には2、後者には1を附して表わす事にする。各状態は次のように分類される。

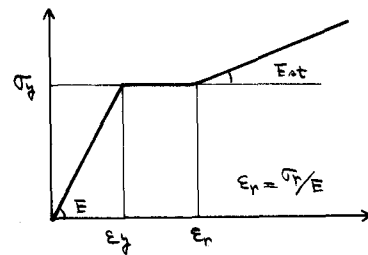
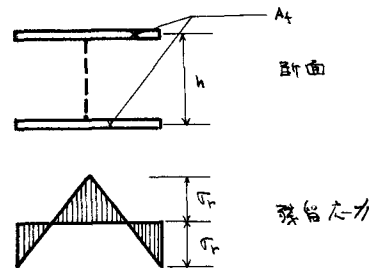


図-4

- 状態 I 両フランジが弾性域にある
 状態 II 上フランジが一部ソ性域にあり, 下フランジが弾性域にある。
 状態 III 上下フランジが一部ソ性域にある。
 状態 IV 上フランジが完全にソ性域にあり, 下フランジが弾性域にある。
 状態 V 上フランジが完全にソ性域にあり, 下フランジが一部ソ性域にある。
 状態 VI 上下フランジが完全にソ性域にある。

それぞれの状態は $RM = M/M_p$, $RN = N/N_p$ といて次式で表えられる。

- 状態 I - 1, $0 \leq RM + RN \leq \epsilon$, $0 \leq RM - RN \leq \epsilon$, I - 2, $0 \leq RM + RN \leq \epsilon$, $0 \geq RM - RN \geq -\epsilon$
 状態 II - 1, $\epsilon \leq RM + RN \leq 1$, $0 \leq RM - RN \leq \epsilon$, II - 2, $\epsilon \leq RM + RN \leq 1$, $0 \geq RM - RN \geq -\epsilon$
 状態 III - 1, $\epsilon < RM + RN \leq 1$, $\epsilon < RM - RN \leq 1$, III - 2, $\epsilon < RM + RN \leq 1$, $-\epsilon \geq RM - RN \geq -1$
 状態 IV - 1, $1 < RM + RN$, $0 \leq RM - RN \leq \epsilon$, IV - 2, $1 \leq RM + RN$, $0 \geq RM - RN \geq -\epsilon$ (W)
 状態 V - 1, $1 < RM + RN$, $\epsilon \leq RM - RN \leq 1$, V - 2, $1 \leq RM + RN$, $-\epsilon \geq RM - RN \geq -1$
 状態 VI - 1, $1 < RM + RN$, $1 \leq RM - RN$, VI - 2, $1 \leq RM + RN$, $-1 \geq RM - RN$

断面の回転の変化率と中立軸の位置 ξ の場合の式は, $R\phi = (h\phi/E_g)$ といて

- 状態 I - 1 $R\phi = 2RM$, $\xi = \frac{1}{2}(\frac{h}{c})AN$
 状態 II - 1 $R\phi = (2-\epsilon) + (RM - RN) - 2\sqrt{1-\epsilon}\sqrt{1-(RM+RN)}$, $\xi = 1/2 - \frac{1}{R\phi} \cdot (RM - RN)$
 状態 III - 1 $R\phi = 2(2-\epsilon) - 2\sqrt{1-\epsilon}\sqrt{1-(RM+RN)} - \sqrt{1-(RM-RN)}$
 $\xi = \{(2-\epsilon) - 2\sqrt{1-\epsilon}\sqrt{1-(RM+RN)}\} / R\phi - 1/2$
 状態 IV - 1 $R\phi = (2-\epsilon) + \frac{1}{\epsilon c} (RM + RN - 1) + (RM - RN)$ (12)
 $\xi = \{(2-\epsilon) + \frac{1}{\epsilon c} (RM + RN - 1)\} / R\phi - 1/2$
 状態 V - 1 $R\phi = \frac{1}{\epsilon c} (RM + RN - 1) + 2(2-\epsilon) - 2\sqrt{1-\epsilon}\sqrt{1-(RM-RN)}$
 $\xi = \{(2-\epsilon) + \frac{1}{\epsilon c} (RM + RN - 1)\} / R\phi - 1/2$
 状態 VI - 1 $R\phi = 2RM/\epsilon c + 2(2-\epsilon) - 2/\epsilon c$
 $\xi = \{(2-\epsilon) + (RM + RN - 1)/\epsilon c\} / R\phi - 1/2$

で表えられる。 $\epsilon = \sigma_y/\sigma_u$

$$\tau_{ut} = E_{st}/E, M_p = A_s \sigma_y h$$

$$N_p = 2A_s \sigma_y, \phi_y = \frac{2\sigma_y \epsilon}{E h}$$

$$\epsilon = 1 - \sigma_y/\sigma_u \text{ である。}$$

よって

$$\mu = 2RN/R\phi \quad \left\{ \begin{array}{l} (10) \\ \mu = RN/\xi \cdot R\phi \end{array} \right.$$

$$\mu = RN/\xi \cdot R\phi$$

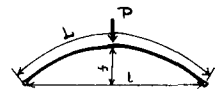
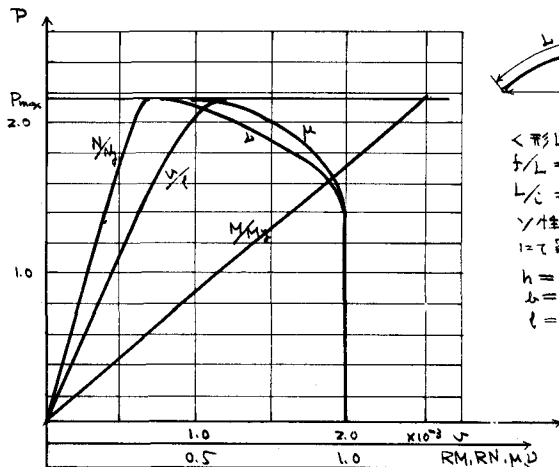
より μ が得られ, これ等

μ を使用して式(1)~式

の計算を繰り返してやる。

図-5 に中央に荷重が載った

ときの計算例を示す。



< 断面 (等断面)

$$b/L = 0.125$$

$$L/c = 75$$

ソ性域は中央の
1/2 最大荷重

$$h = 2402 \text{ mm}$$

$$b = 1000 \text{ mm}$$

$$c = 100 \text{ mm}$$

図-5