

徳島大学 正会員 星 治 雄

〃 〃 児 嶋 弘 行

〃 〃 〇 平 尾 潔

1. まえがき 塑性解析の方法には上界定理, 下界定理および上下界定理と利用した多くの解析方法があるが, そのうちでも下界定理と利用し倉西博士が研究された内力追跡法(直接追跡法)とよばれる解析方法は初歩的な弾性計算の繰返しにより, まったく体系的に解析を進めることができ, その解析に電子計算機と利用する上で大変有利な解析方法であると思われる。すでに, 筆者らは電子計算機TOSBAC-3400と利用し, 上述のような内力追跡法による平面棒構造物に対する崩壊過程の自動追跡について発表したが^{2), 3)}, これらの解析における材端での降伏条件としては全塑性曲げモーメントだけを対象としたものであって軸方向力の影響はまったく考慮していなかった。しかしながら一般的な平面棒構造物の塑性解析を行なう場合には, その解析の対象とする構造形状および載荷状態によってはかなり大きな軸方向力がその構成部材中に作用する場合が生じ, 材端における降伏条件に軸方向力の影響を考慮する場合としない場合では崩壊過程とか最終的な崩壊荷重の値もかなり異なってくるものと考えられる。したがって, 本研究ではこの点に注目し, 上述のような内力追跡法を用いた平面棒構造物に対する崩壊過程の自動追跡プログラムの材端における降伏条件の判定部分に改良を加え, 軸方向力が平面棒構造物の崩壊過程および最終的な崩壊荷重におよぼす影響を検討できるようにしたものである。なお, 材端における降伏条件に軸方向力の影響を考慮する場合には, 断面形状により降伏条件式(後述の5.参照)が異なるから, 本研究では解析の対象とする断面形を矩形, 対称工型(対称箱型)および中空円形断面に限定した。

2. 解析上の仮定 通常の構造解析および平面棒構造物の塑性解析に用いられる基礎仮定以外につきのような仮定ももうける。

- 1) 曲げ部材における曲率と曲げモーメントおよび軸方向歪と軸方向力の関係はそれぞれ図-1, 図-2の関係にあるものとする。(図中の M_p および P_0 は軸方向力と曲げモーメントの組み合わせを考えた, 塑性関節発生時の曲げモーメントおよび軸方向力と意味する。後述の5.参照)
- 2) 塑性領域の広がり曲げによるものは材端の塑性関節に集約されるが軸方向力によるものは部材全長に分布するものとする。したがって, 仮定1)より, 曲げ部材の一端に塑性関節が発生すればそれ以後ではその部材は軸方向力には抵抗できない。
- 3) 軸力部材(両端滑節部材)における応力と歪の関係は図-3の関係にあるものとする。ここでいう軸力部材とは崩壊の過程中にあらわれる両端滑節部材は除外した最初から存在する両端滑節部材のことである。
- 4) 材端の降伏条件におよぼすせん断力の影響は無視する。

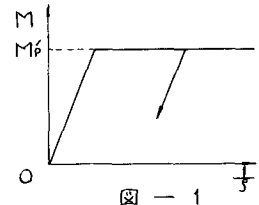


図 - 1

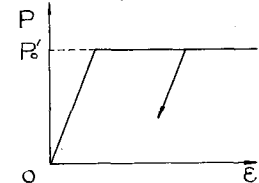


図 - 2

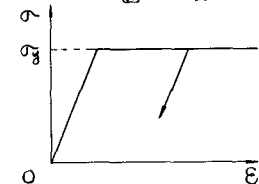


図 - 3

3. 内力追跡法について 降伏条件に軸方向力の影響を考慮しない場合とする場合の内力追跡法における解析上の相異点は材節における降伏モーメントとして前者では全塑性曲げモーメント M_p と、後者では5で示す降伏条件式から得られる曲げモーメント M_p^0 を用いる点、および、塑性関節が前者では一つの変形自由度をもつ（塑性関節には M_p だけが作用する。）のに対し、後者では2つの変形自由度をもつ（塑性関節には M_p および P_0 が作用する。）という2点だけであり、あとの解析手順は両者ともまったく同様である。したがって、ここでは内力追跡法についての詳細な説明は文献(1)にゆずり、以下にその概要を要約する。ある外荷重と弾性的に平行状態にある構造物において、その荷重強度を漸次増大してゆくと、その構成部材の断面力も増大し、ある点で降伏条件式も満足するに到って塑性関節を生ずるが、塑性関節においてはそれ以後の荷重強度の増加に対しては断面力が増大しないため、他の弾性部分が荷重を負担し、断面力の増加の割合が激しくなって次々と塑性関節が発生し、ついには材構と形成し崩壊する。この崩壊過程のすべてを順次追跡して崩壊荷重を定めるのが内力追跡法である。ある関節が生じてから次の関節が生じるまでの荷重強度の増加分に対しては、塑性関節以外の部分は弾性的に挙動するため、この部分に対しては漸次変化してゆく構造形式に対する弾性計算が必要となり、手計算では労力を要するが、1) 崩壊に到るまでの塑性関節の生ずる位置、荷重強度、断面力および変形量などを関節の発生するごとに段階的に順を追って知ることができる。したがって、2) 全崩壊だけでなく、部分崩壊や準崩壊についても容易に検討できる。などの利点を有している。

しかしながら、このような内力追跡法による塑性解析もやはり手計算では複雑となり、その解析に電子計算機を利用することが必要となる。

4. 弾性計算法について 上述のように内力追跡法による塑性解析は、塑性関節の発生により、順次変化する構造形式に対し、弾性計算を繰返すことにより行なわれる。したがって、このような解析に電子計算機を利用するためには、その弾性計算の部分に用いられる計算方法としては構造形式の如何にかかわらず同様な手順で解析できることが必要であり、筆者らは変形法を採用した。各種材節条件に応じた変形法の基本式は以下のようである。

1) 両端剛節部材に対する基本式

$$R_{ij} = a_{ij} (u_i - u_j) + b_{ij} (v_i - v_j) + c_{ij} (\theta_i - \theta_j), \quad M_{ij} = c_{ij} (u_i - u_j) + \bar{c}_{ij} (v_i - v_j) \\ P_{ij} = b_{ij} (u_i - u_j) + \bar{a}_{ij} (v_i - v_j) + \bar{c}_{ij} (\theta_i - \theta_j) + d_{ij} \theta_i + \bar{d}_{ij} \theta_j \quad (1)$$

2) i 端剛節, j 端塑性関節部材に対する基本式 ($M_{ji} = M_{pj}$, $N_{ij} = N_{ji} = P_{ij}$)

$$R_{ij} = \alpha_{ij} (u_i - u_j) + \beta_{ij} (v_i - v_j) + \gamma_{ij} \theta_i + N_{xij}, \quad M_{ij} = c_{ij} (u_i - u_j) + \bar{c}_{ij} (v_i - v_j) \\ P_{ij} = b_{ij} (u_i - u_j) + \bar{a}_{ij} (v_i - v_j) + \bar{c}_{ij} \theta_i + N_{yij} + d_{ij} \theta_i + H_{ij} \quad (2)$$

3) i 端塑性関節, j 端剛節部材に対する基本式 ($M_{ij} = M_{pj}$, $N_{ij} = N_{ji} = P_{ij}$)

$$R_{ij} = \alpha_{ij} (u_i - u_j) + \beta_{ij} (v_i - v_j) + \gamma_{ij} \theta_j + N_{xij}, \quad M_{ij} = M_{pj} \\ P_{ij} = b_{ij} (u_i - u_j) + \bar{a}_{ij} (v_i - v_j) + \bar{c}_{ij} \theta_j + N_{yij} \quad (3)$$

4) i, j 両端塑性関節部材に対する基本式 ($M_{ij} = M_{pj}$, $M_{ji} = M_{pj}$, $N_{ij} = N_{ji} = P_{ij}$)

$$R_{ij} = e_{ij} (u_i - u_j) + f_{ij} (v_i - v_j) + N_{xij}, \quad M_{ij} = M_{pj} \\ P_{ij} = f_{ij} (u_i - u_j) + \bar{e}_{ij} (v_i - v_j) + N_{yij} \quad (4)$$

上式中の諸係数 ($a_{ij}, b_{ij}, \dots, f_{ij}, \bar{e}_{ij}$) および荷重項 (N_x, N_y, H) はつぎのようである。

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= \frac{EF_{ij}}{l_{ij}} \cos^2 \alpha_{ij} + \frac{12EI_{ij}}{l_{ij}^3} \sin^2 \alpha_{ij}, \quad \bar{A}_{ij} = \frac{EF_{ij}}{l_{ij}} \sin^2 \alpha_{ij} + \frac{12EI_{ij}}{l_{ij}^3} \cos^2 \alpha_{ij}, \quad B_{ij} = \left(\frac{EF_{ij}}{l_{ij}} - \frac{12EI_{ij}}{l_{ij}^3} \right) \sin \alpha_{ij} \cos \alpha_{ij} \\
C_{ij} &= -\frac{6EI_{ij}}{l_{ij}^2} \sin \alpha_{ij}, \quad \bar{C}_{ij} = \frac{6EI_{ij}}{l_{ij}^2} \cos \alpha_{ij}, \quad d_{ij} = \frac{4EI_{ij}}{l_{ij}}, \quad \bar{d}_{ij} = \frac{2EI_{ij}}{l_{ij}} \\
\bar{A}_{ij} &= \frac{EF_{ij}}{l_{ij}} \cos^2 \alpha_{ij} + \frac{3EI_{ij}}{l_{ij}^3} \sin^2 \alpha_{ij}, \quad \bar{A}_{ij} = \frac{EF_{ij}}{l_{ij}} \sin^2 \alpha_{ij} + \frac{3EI_{ij}}{l_{ij}^3} \cos^2 \alpha_{ij}, \quad \bar{B}_{ij} = \left(\frac{EF_{ij}}{l_{ij}} - \frac{12EI_{ij}}{l_{ij}^3} \right) \sin \alpha_{ij} \cos \alpha_{ij} \\
\bar{C}_{ij} &= -\frac{3EI_{ij}}{l_{ij}^2} \sin \alpha_{ij}, \quad \bar{C}_{ij} = \frac{3EI_{ij}}{l_{ij}^2} \cos \alpha_{ij}, \quad \bar{d}_{ij} = \frac{3EI_{ij}}{l_{ij}}, \quad e_{ij} = \frac{EF_{ij}}{l_{ij}} \cos^2 \alpha_{ij} \\
f_{ij} &= \frac{EF_{ij}}{l_{ij}} \sin \alpha_{ij} \cos \alpha_{ij}, \quad \bar{e}_{ij} = \frac{EF_{ij}}{l_{ij}} \sin^2 \alpha_{ij}, \quad N_{xij} = P_{0ij} \cos \alpha_{ij} - 3M_{\phi ij} \sin \alpha_{ij} / 2l_{ij} \\
N_{yij} &= P_{0ij} \sin \alpha_{ij} + 3M_{\phi ij} \cos \alpha_{ij} / 2l_{ij}, \quad N'_{xij} = P_{0ij} \cos \alpha_{ij} - (M_{\phi ij} + M_{\phi i}) \sin \alpha_{ij} / l_{ij} \\
N'_{yij} &= P_{0ij} \sin \alpha_{ij} + (M_{\phi ij} + M_{\phi i}) \cos \alpha_{ij} / l_{ij}, \quad H_{ij} = M_{\phi ij} / 2
\end{aligned}$$

ただし、荷重項中の P_{0ij} , $M_{\phi ij}$ は材端 i での降伏条件式を満足するような軸方向力および曲げモーメントである。

これらの式(2)~(4)は材端に塑性関節(2つの変形自由度をもった)を有する単一部材 ij に対する変形法の基本式であるが、上式中の P_{0ij} および $M_{\phi ij}$, $M_{\phi i}$ が 0 とおけば通常の滑節部材に対する基本式と一致する。なお、塑性関節を有する部材では上式中の F_{ij} は 0 として用いることになる。

5. 降伏条件式 軸方向力と曲げモーメントの組合わせを考えると、塑性関節発生時における塑性関節モーメントは全塑性モーメント M_p から M_{ϕ} に減少される。いま、このような減少された塑性モーメント M_{ϕ} とそれに対応する軸方向力 P_0 の関係を表わす式を降伏条件式と呼ぶことにすれば、対称工型(対称箱型)および矩形断面に対する降伏条件式(工型断面に対しては近似式)はそれぞれ、式(5), (6)のようになるが、これらの説明は参考文献にゆずりここでは省略する。

$$1) \text{ 対称工型断面: } \frac{M_{\phi}}{M_p} = 1.18 \left(1 - \frac{P_0'}{P_0} \right), (|P_0'| > 0.1525437P_0), \frac{M_{\phi}}{M_p} = 1, (|P_0'| \leq 0.1525437P_0) \quad (5)$$

$$2) \text{ 矩形断面: } \frac{M_{\phi}}{M_p} = 1 - \left(\frac{P_0'}{P_0} \right)^2 \quad (6)$$

つぎに、図-4(a)のような外径 $2R$ 、内径 $2r$ の中空円形断面に対する降伏条件式はつぎのように誘導される。すなわち、図-4より

$$M_p = A_2 \sigma_y \cdot y = 4(R^3 - r^3) \cdot \sin \theta \cdot \sigma_y / 3$$

$$P_0' = A_1 \cdot \sigma_y = 2\alpha(R^2 - r^2) \cdot \sigma_y$$

$$M_p = \sigma_y \cdot Z = 4(R^3 - r^3) \cdot \sigma_y / 3, \quad P_0 = \pi(R^2 - r^2) \cdot \sigma_y \text{ となり、したがって、} M_{\phi}/M_p = \sin \theta = \cos \alpha$$

$P_0'/P_0 = 2\alpha/\pi$ となる。これより中空円形断面に対する降伏条件式が式(7)のようにえられる。

$$3) \text{ 中空円形断面: } \frac{M_{\phi}}{M_p} = \cos \alpha = \cos \left(\frac{\pi P_0'}{2P_0} \right) \quad (7), \text{ この式(7)の表現では } M_{\phi} \text{ と } P_0' \text{ の関係が}$$

複雑であるから、式(5), (6)に類似したつぎのような式(8)で近似する。

$$\frac{M_{\phi}}{M_p} = 1 - 1.15 \left(\frac{P_0'}{P_0} \right)^2, (|P_0'| \leq 0.63662P_0), \frac{M_{\phi}}{M_p} = 1.47 \left(1 - \frac{P_0'}{P_0} \right), (|P_0'| > 0.63662P_0) \quad (8)$$

なお上式中、 M_{ϕ} : 塑性関節に作用する曲げモーメント, P_0' : 塑性関節に作用する軸方向力, M_p : 全塑性曲げモーメント, P_0 : 全塑性軸方向力をあらわすものとする。

6. 弾性復活について 軸力と曲げの組合せによって塑性化された塑性関節が弾性を復活する

場合としては、1)塑性関節がその発生時とは逆方向の回転増も行なう場合。2)軸方向力の絶対値が塑性関節発生時のそれよりも減少する場合の2通りが考えられるが、先きに筆者らが軸方向力の影響を考慮しない場合について解析した結果³⁾では1)による弾性復活はおこななかった。したがって、本研究では電子計算機の容量も考え、2)の復活についてだけ判定するようにした。

7. プログラムについて 平面棒構造物を対象とした前述のような内力追跡法による塑性解析の全過程を、必要な初期データとともに、電子計算機が自動的に追跡し、1)塑性関節発生時の荷重強度、節変形量および材端における断面力。2)塑性関節発生位置。3)最終的な崩壊荷重などが求まるような崩壊過程の自動追跡プログラムを電子計算機TOSBAC-3400を対象として作成したが、ここではその説明は省略し、演算の流れを図-5のフローチャートに示す。

8. 計算について 図-(6)、(7)に示すような剛節ワーレントラス橋および2層門型ラーメンを対象として、材端における降伏条件式に軸方向力の影響と考慮した場合、それがこれらの構造物の崩壊過程や崩壊荷重にどのように影響するか、また、その影響が部材の断面形によってどのように異なるかを検討するため、2,3の数値計算を行なってみたがその結果は紙面の都合上割愛し、より詳しい資料を講演会当日プリントして配布する予定である。

9. 参考文献

- 1) 倉西正嗣：極限設計法，オーム社，P.23～39
- 2) 児嶋 平尾：第20回土木学会中国四国支部講演概要，P.56～58
- 3) 星 児嶋 平尾：土木学会第24回年次学術講演会講演集第1部，P.51～54
- 4) 木原 博：塑性設計法，森北出版，P.115～120
- 5) 星 児嶋 平尾：土木学会第23回年次学術講演会講演概要，P.61～64
- 6) 倉西正嗣，外五氏：ホッジ構造物の塑性解析，コロナ社，P.185～199
- 7) 服部 正：コンピューターによる構造数値解析法，建築工学大系，彰国社，P.182～P.191
- 8) 杯 毅：軽構造の理論とその応用，財団法人日本科学技術連盟，P.487～495

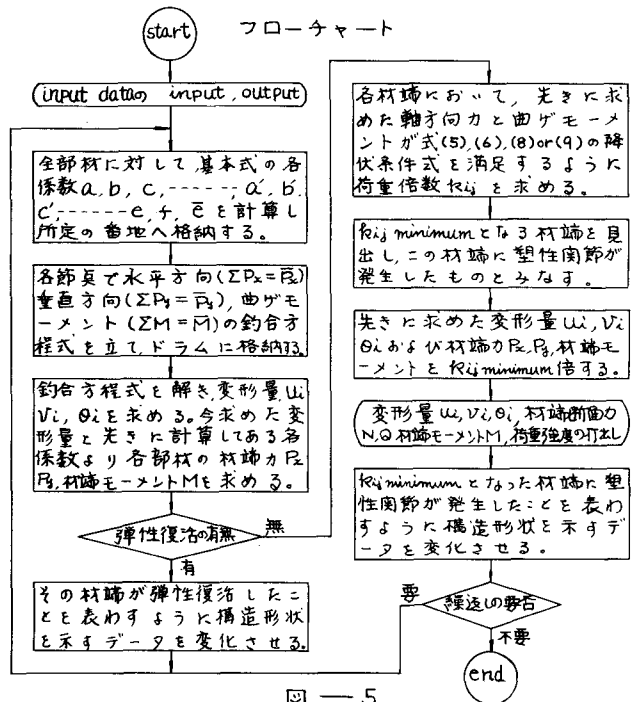


図-5

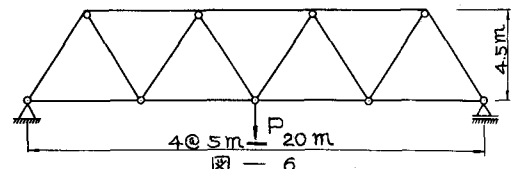


図-6

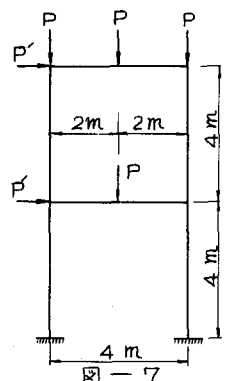


図-7