

I-86 部材分割による弾塑性ばりの簡易解法

九州大学工学部 正員 山崎徳也
九州大学工学部 正員 黒木健実

1 まえがき

弾塑性ばりの解析において、非線型となる $M-\phi$ 関係と材軸方向の塑性領域とも忠実に考慮した厳密解の算定は一般にきわめて困難である。

著者は解析を簡易化するため、はりを有限個の部材に分割して材軸方向の塑性領域を直接考慮する煩雑さを回避し、さらに $M-\phi$ 関係の線型化により演算労力の軽減を、分割数の増加により精度の向上を図りうるようにしたもので、2, 3 の計算例において本法と補正エネルギー法による厳密解析および塑性解析²⁾とを比較検討し、精度の吟味を行なった。

2 基本式

(i) 曲げモーメントと曲率の関係 一般に応力とひずみの関係は図-1 に示すように、弾性域では Hooke の法則 $\sigma^e = E\varepsilon$ に従う直線で、塑性域では $\sigma^p = E\varepsilon_y (\varepsilon/\varepsilon_y)^{1/n}$ なる曲線で表わされる。したがって、圧縮側の応力-ひずみ関係を引張側と同一とみなせば、上下左右とも対称な断面の曲げモーメント M は図-2 より次式で与えられる。

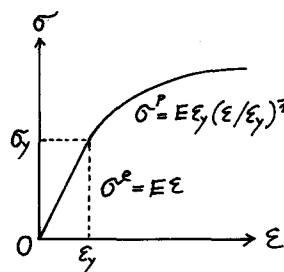


図-1

$$M = 2 \int_0^{\eta} \sigma^e y dA + 2 \int_{\eta}^h \sigma^p y dA \quad (1)$$

ただし ε_y : 降伏ひずみ, σ_y : 降伏応力, n : 正の無次元定数
 dA : 微小面積

いま、断面を矩形と仮定すれば式(1)の M は曲率 ϕ の関数として次のように表わされる。

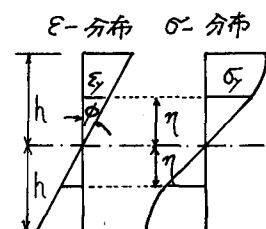


図-2

$$\left. \begin{aligned} m &= \varphi, & |m| \leq 1.0 \\ m &= \pm \left\{ (1-\beta)\varphi^2 + \beta\varphi^{1/n} \right\}, & |m| > 1.0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ただし $m = M/M_y$, $\varphi = \phi/\phi_y$, M_y, ϕ_y : 降伏時の曲げモーメントおよび曲率, $\beta = 3n/(1+2n)$
部材を完全弾塑性体とみなしうる場合は $n = \infty$ となり、 $m-\varphi$ 関係は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} m &= \varphi, & |m| \leq 1.0 \\ m &= \pm \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \varphi^{-2} \right), & |m| > 1.0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

さらに、補正エネルギー等置の条件¹⁾を用いて式(3)の塑性域における曲線を1本の直線で近似すれば、

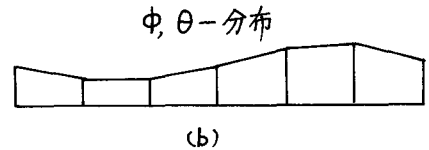
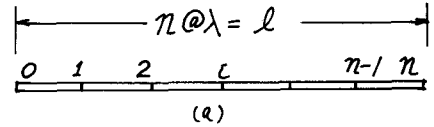
$$\left. \begin{aligned} m &= \varphi, & |m| \leq 1.0 \\ m &= \pm 1 + 4(\varphi \mp 1), & |m| > 1.0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(ii) たわみおよびたわみ角 微小変形理論ではたわみ角を θ ，たわみを y ，材軸方向の座標を x とすれば次式が成立する。

$$\int d\theta = \int \phi dx, \quad \int dy = \int \theta dx \quad (5)$$

ここで，はりを図-3(a)に示すように n 等分し， ϕ および θ の分布曲線を同図(b)のように折れ線で近似すれば，式(5)より各分割断面のたわみ角およびたわみが次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \theta_i - \theta_{i-1} &= \frac{1}{2} \lambda (\phi_{i-1} + \phi_i), \\ y_i - y_{i-1} &= \frac{1}{2} \lambda (\theta_{i-1} + \theta_i), \quad (i=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} (6)$$



3 境界条件および適合条件 (図-3(a)参照)

(i) 片持ばり 左端の0点を固定とすれば

$$\theta_0 = y_0 = 0 \quad (7)$$

(ii) 単純ばり 境界条件は $y_0 = \phi_0 = y_n = \phi_n = 0$ (8)

一方，式(6)のオ2式の総和より

$$\theta_0 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i + \theta_n = 0 \quad (9)$$

式(6)のオ1式および式(9)より式(6)の計算に必要な変位のたわみ角 θ_i が次のように求められる。

$$\theta_i = \frac{\lambda}{n} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \phi_i \quad (10)$$

(iii) 一端固定他端ヒンジばり 0点を固定， n 点をヒンジ支承とすれば境界条件は

$$\theta_0 = y_0 = \phi_n = y_n = 0 \quad (11)$$

式(6)のオ2式の総和より

$$2 \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i + \theta_n = 0 \quad (12)$$

式(12)および式(6)のオ1式より不静定力の算定に必要な適合条件が次のように求められる。

$$(n - \frac{1}{2}) \phi_0 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \phi_i = 0 \quad (13)$$

(iv) 両端固定ばり 境界条件は $\theta_0 = y_0 = \theta_n = y_n = 0$ (14)

式(6)の総和より

$$\phi_0 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \phi_i + \phi_n = 0, \quad \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i = 0 \quad (15)$$

式(6)のオ1式を用いて式(15)のオ2式を変形すれば

$$(n-1) \phi_0 + \sum_{i=2}^n \{2(n-i) + 1\} \phi_{i-1} = 0 \quad (16)$$

4 解法

静定ばりに関しては平衡条件より一義的に各分割断面の曲げモーメントが決定されるため、これを式(2) または式(3) に適用すれば曲率 φ が算定される。よって片持ばりでは式(6), (7)より、また、単端ばりでは式(6), (8), (10)より各分割断面のたわみ角およびたわみが求められることになる。一方、不静定ばりではあらかじめ弾性計算によって塑性域の発生順序を推定し、うへ不静定力を指定すれば、平衡条件、 m - φ 関係および適合条件より指定した不静定力に対応する m , φ および荷重が決定される。

よって一端固定他端ヒンジばりの場合は式(6), (11)より、また、両端固定ばりの場合は式(6), (14)よりたわみ角およびたわみが算出されることになる。

5 計算例

(i) 片持ばり 自由端に集中荷重

P が作用する場合の各断面の曲げモーメントは図-4を参照して

$$\left. \begin{aligned} m_0 &= P, & m_1 &= 3P/4 \\ m_2 &= 2P/4, & m_3 &= P/4 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

ただし $P = Pl/M_y$

式(3)より

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= m, & |m| &\leq 1.0 \\ \varphi &= \pm \frac{1}{\sqrt{3+2m}}, & |m| &> 1.0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

式(17), (18)および式(6), (7)より崩壊に至るまでの片持ばりの挙動が解明されることになる。図-4は自由端のたわみについて厳密解¹⁾および塑性解析による近似解²⁾と比較したもので、 $n=4$ 程度の粗い分割でも $P < 1.4$ の範囲では良好な結果をえている。

(ii) 単端ばり 中央集中荷重を受

ける単端ばりを図-5に示すように8等分すれば、左半分について次式が成立する。

$$m_1 = P/4, \quad m_2 = 2P/4$$

$$m_3 = 3P/4, \quad m_4 = P \quad \text{ただし } P = Pl/4M_y$$

上式と式(18), (6), (8), (10)より各断面のたわみ角およびたわみが求められる。中央点のたわみに関して(i)と同様に厳密解および近似解と比較すれば図-5がえられる。本例でも $P > 1.4$ では過大評価となり誤差が急速に増大するが、 $P < 1.4$ の範囲では良好な結果をえている。

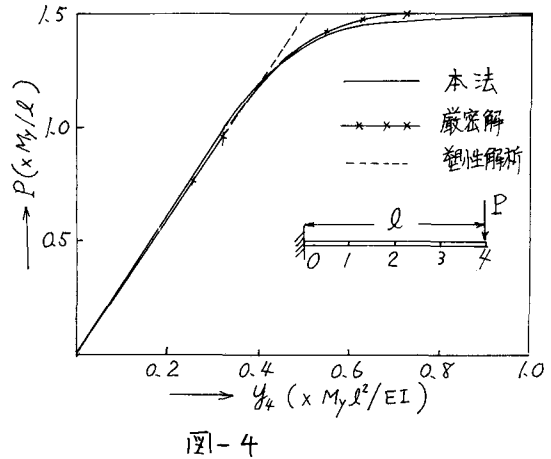


図-4

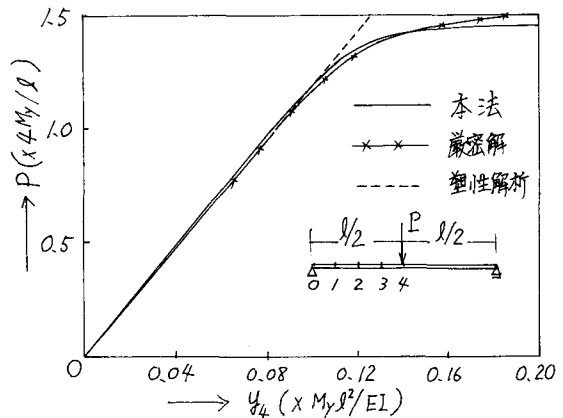


図-5

(iii) 両端固定ばり 図-6 に示す両端固定ばりが集中荷重を受け、破壊するまでの解析過程を示せば次のとおりである。

まず、弾性計算によれば

$$M_0 = -4Pl/27, M_2 = 2Pl/81$$

$$M_6 = -Pl/27$$

よって、降伏曲げモーメント M_y と降伏荷重 P_y の関係は

$$M_y = 4P_y l / 27$$

次に、各分割断面の曲げモーメントを求めるに

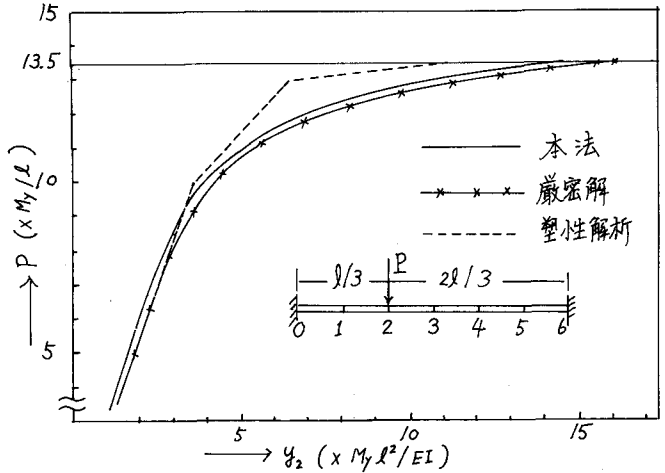


図-6

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= \frac{5}{6} m_0 + \frac{1}{6} m_6 + \frac{6}{5} P, & m_2 &= \frac{4}{5} m_0 + \frac{2}{5} m_6 + \frac{12}{5} P, & m_3 &= \frac{3}{5} m_0 + \frac{2}{5} m_6 + \frac{9}{5} P \\ m_4 &= \frac{2}{5} m_0 + \frac{4}{5} m_6 + \frac{6}{5} P, & m_5 &= \frac{1}{5} m_0 + \frac{5}{5} m_6 + \frac{3}{5} P, & T \leq L & P = 4Pl/27M_y \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

(a) 0 点の塑性状態に移行するとき (弾性限界)

$$m_0 = -1.0, \quad q_i = m_i, \quad (i=1, 2, \dots, 6) \quad (20)$$

式(19), (20) を式(15), (16) に適用して m_6, P および q_i を求め、続いて式(14) の境界条件を考慮すれば式(6) よりたわみ角およびたわみを算出される。

(b) 2 点の塑性状態に移行するとき

$$\text{式(14) の } m-i \text{ 関係を用いると } q_0 = 4m_0 + 3, \quad q_1 = m_1, \quad q_2 = m_2 = 1.0, \quad q_i = m_i, \quad (i=3, 4, 5, 6) \quad (21)$$

式(21), (19) を式(15), (16) に適用して m_0, m_6, P を求めれば、式(14), (6) よりたわみ角およびたわみを与えられる。

(c) 6 点の塑性状態に移行するとき

$$q_0 = 4m_0 + 3, \quad q_1 = m_1, \quad q_2 = 4m_2 - 3, \quad q_i = m_i, \quad (i=3, 4, 5), \quad q_6 = m_6 = -1.0 \quad \text{以下(b)と同様}$$

(d) 崩壊時

$$m_0 = m_6 = -1.5, \quad m_2 = 1.5, \quad q_i = m_i, \quad q_2 = m_2, \quad (i=3, 4, 5), \quad q_6 = -3.0 \quad \text{以下(b)と同様}$$

以上より荷重作用点の荷重—たわみ関係が図-6 のように求められる。崩壊時のたわみは厳密解より 9.3% の過小評価となるが、分割数を増加すれば本法の精度は当然向上し、 $n=12$ では 5% の誤差に減少する。

6 むすび

本報告では簡明のため矩形断面をもつ等断面ばりに限定してその弾塑性解析の簡易解法を述べたが、さらに本法は変断面ばりへの適用も可能であり、これについては後日報告の予定である。

参考文献

- 1) 山崎・太田・石川: 補正エネルギー法による直線材構造物の弾塑性解析, 土木学会論文集, 第134号, 昭和41年10月
- 2) 藤田・楠田・川井: 塑性設計法, 森北出版