

石川工業高等専門学校 正会員 ○出村禧典
金沢大学工学部 正会員 小堀為雄

1. まえがき

近年、構造物にまれに作用するであろう大きな衝撃に対する設計法で、塑性変形が生じてても変形量が規定の範囲を越さないように構造物を設計しようとする設計法が注目されるようになってきた。そのため、衝撃による構造物の弾塑性応答の解析の研究が盛んに行なわれ、構造物設計の合理化に寄与している。

しかし、従来の研究に使用されている振動理論は、セン断変形や回転慣性の影響を無視した Euler Bernoulli 理論が多く、それらの要素をも考慮に入れた Timoshenko 理論は少ない。一般の構造物ではそれらの要素の影響は小さいが、橋梁などの土木構造物に広く用いられている腹板の薄い I 型断面ばりでは、他の構造物に比べセン断応力が大きくセン断変形の影響はかなり大きいと考えられる。本研究では、構造物の基本構成部材である単純支持はり、両端固定はりの衝撃による弾塑性応答におよぼすセン断変形と回転慣性の影響を調べ、それらの要素が設計上にもたらす問題点を考察しながら、特に、セン断変形の影響に重点をおき研究を進めている。

2. 研究方法

Timoshenko Beam の衝撃による弾塑性応答の解析は、応答が非線型振動であるとともに、塑性領域におけるセン断力と曲げモーメントの相互作用をも考慮しなければならないため数学的に困難な点が多い。そこで、本研究では Michigan 州立大学 Wen 教授の提案したはりを一種の近似モデルに置き換え数値積分を適用する数値計算法を参考に、数値解析によることとした。具体的には、Timoshenko 理論を用いることのできるようにモデル化した Timoshenko model による数値解析結果と Euler 理論を適用した Euler model による結果を比較することである。

3. 数値計算法

本研究に用いた数値計算法を簡単に説明する。

Timoshenko model の計算法 model は Fig. 1 および 2 に示すように、連続したはりを panel に分割したものである。panel は剛体で、変形は force point に挿入されている moment spring と shear spring が受け持つと考える。spring の flexibility は、force point の両側の panel の flexibility のそれぞれの半分をかためたものとする。外力や質量は panel の中央点 (mass point) に集中させる。なお、支点は force point に一致させなければならない。model 解析に使用した関係式は Table-1 に示す。これらの関係式を用い Fig. 4 のフローチャートに従って数値積分を行なう。

さて、数値積分を進めて行くと、塑性ポテンシャル関数 $f(M_i, S_i)$ が正となる。これは、はりの挙動が塑性領域に入ったことを意味する。Table-1 の式番号 5 および 6 なる式は、 α_i , β_i の全体に適用

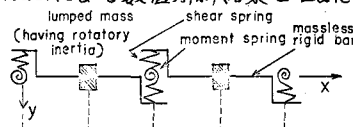


Fig. 1 変形前の model

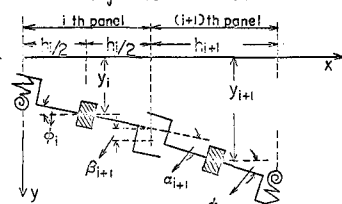


Fig. 2 変形後の model

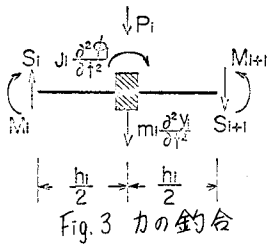


Table-1 Model: 使用される関係式および記号

1. moment Spring の変形 (d_i)	$d_{i+1} = \phi_{i+1} - \phi_i$, Fig. 2 参照
2. shear Spring の変形 (β_i)	$\beta_{i+1} = y_{i+1} - y_i - (h_{i+1}\phi_{i+1} - h_i\phi_i)/2$, Fig. 2 参照
3. 運動方向の運動方程式	$m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = S_{i+1} - S_i + P_i$, Fig. 3 参照
4. 回転方向の運動方程式	$J_i \frac{d^2 \phi_i}{dt^2} = M_i - M_{i+1} + h_i(S_i + S_{i+1})/2$, Fig. 3 参照
5. 曲げモーメント (M_i) と d_i の関係式	$M_i = 2EI d_i / (h_i + h_{i-1})$
6. セン断力 (S_i) と β_i の関係式	$S_i = 2GAB\beta_i / (h_i + h_{i-1})$
7. せん断支持はりの境界条件	$d_i = d_{i+1} = 0, \beta_i = y_i - h_i\phi_i/2, \beta_{n+1} = y_n - h_n\phi_n/2$
8. 両端固定はりの境界条件	$d_i = \phi_i, d_{n+1} = \phi_n, \beta_i = \beta_{n+1}$ (上式と同様)
9. 時間増分 Δt に対する y_i の変化量, ϕ_i も同様	$y_i(t) = y_i(t_0) + \Delta t \dot{y}_i(t_0) + (\Delta t)^2 \ddot{y}_i(t_0)/2, t = t_0 + \Delta t$
10. 時間増分 Δt に対する ϕ_i の変化量, ϕ_i も同様	$\phi_i(t) = \phi_i(t_0) + \Delta t \dot{\phi}_i(t_0) + (\Delta t)^2 \ddot{\phi}_i(t_0)/2$

できない。そこで α, β を
応力に關係する α_e, β_e と

關係しない α_p, β_p に分けなければならない。以下、本研究に用いた
分割ならびに応力計算のテクニックを簡単に述べる。まず、十分正
確に、挙動が弾性領域より塑性領域に入る時間、すなわち $f(M_i, S_i)$
 $= 0$ なる $t = t_{po}$ を見つける。 t_{po} より塑性計算に入る。 Fig-5 参
照、本研究では、変形状態を表わす $\bar{\alpha} - \bar{\beta}$ 座標系と応力状態を表わ
す $m - s$ 座標系の2つの座標系を用いる。 $t = t_{po}$ では2つの座標
系は一致していて、その時の変形状態を点Aとする。 $t = t_{pi} (= t_{po}$
 $+ \Delta t)$ の変形状態点Dは計算することができる。ADを直径とする
円を描き、interaction curve との交点をBとする。点Bは $t = t_{pi}$
における応力状態を示す。次に、点Bが点Dに一致するように $m - s$
座標系を平行移動させ、その点を点Aとし、上記の方法を繰り返
せばよい。 $\overline{OA}$ が塑性変形の増分となる。ADがinteraction curve
の内側に向えば弾性が復元したことを意味し、 $\overline{OA}$ が塑性変形とし
て残る。

Euler model の計算方法 Euler modelはTimoshenko model
のshear spring を取り除いたものであるが、次の点が大きく異なる。

(a) 運動方程式は鉛直方向のみで、Table-1の式番号3なる式のみ
で表わされる。

(b) y_n は $y_1 \sim y_{n-1}$ に従属している。すなわち、

$$y_n = f(y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_1) \quad \text{-----} \quad \text{Eg. 1}$$

(c) セン断力は外力、慣性力、曲げモーメントより定まる。

$$M_i - M_{i+1} + f_i(S_i + S_{i+1})/2 = 0 \quad \text{-----} \quad \text{Eg. 2}$$

又、本研究ではFig-6に示すような $M - \alpha$ の関係を考えることにより、Euler
model を塑性領域にまで拡張した。

4. 数値解析結果

本研究では、数値解析法によったため、セン断変形の影響を総合的にとられる
ことは実際上困難な点が多い。そこで、構造物の設計上最も重要な関係の1つで

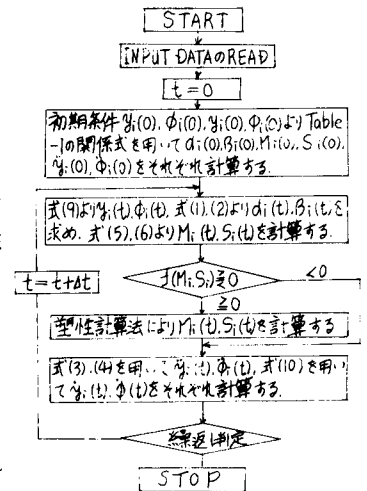


Fig. 4

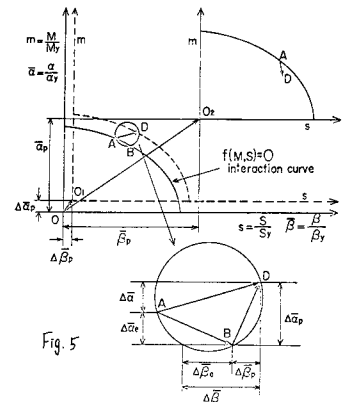


Fig. 5

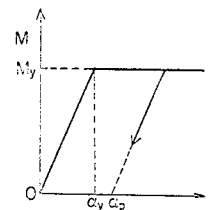


Fig. 6

ある荷重強度と変形（特に最大応答）の関係に及ぼすセン断変形の影響に焦点を絞って数値解析を進めることとした。

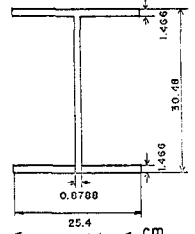
(a) 解析に先だって

・数値解析に用いたはりの断面はFig-6に示すもので、諸量の計算は、理想I型断面として計算した。

・塑性ポテンシャル関数はEg. 3で示されるものを用いた。

$$f(M_i, S_i) = m^2 + s^2 - 1$$

----- Eg. 3 Fig. 7 断面



・数値積分における増分増分 Δt はTimoshenko modelにおいて $T/(5N)^2$, Euler modelでは $T/(10N)^2$ をそれぞれ用いた。Tは単純支持はりの固有周期, Nはpanelの分割数である。

(b) パラメーターについて

スパン長の短い場合は、セン断力の曲げモーメントに対する割合が大きくなり、腹板が薄くなれば、セン断力の曲げ応力に対する割合が大きくなる。そのため、当然セン断変形の影響も大きく表われてくると考えられる。それ故パラメーターとしてスパン長に関するものと腹板厚に関するものが考えられるが、ここではスパン長に関するものを取り上げる。Fig-8に単純支持はりの数値解析結果を、Fig-9で両端固定はりの結果をそれぞれ示す。なお、載荷した衝撃力はEg. 4で表わされる等分布荷重である。

$$p(x,t) = P_y \exp(-2t/T) \text{ ----- Eg. 4}$$

ここで、Tは単純支持はりの固有周期、 P_y ははりをEuler Beamとして計算したはりの弾性荷重荷重である。なお、図中の Y_y は弾性限界変位であり、Yはそれぞれの変形を示す。

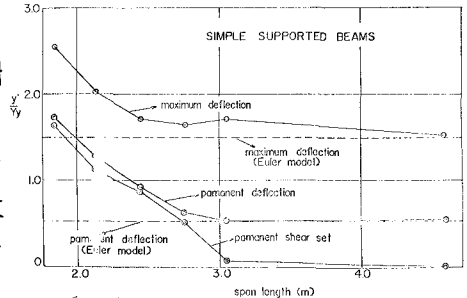


Fig. 8 単純支持はり

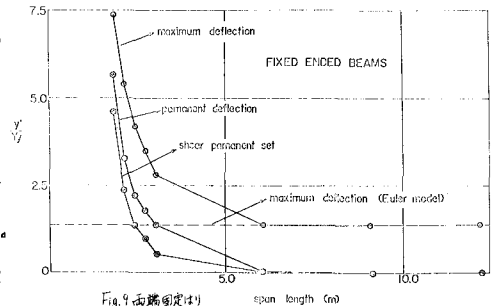


Fig. 9 両端固定はり

解析結果をみると、スパン長の長い場合はTimoshenko modelによる解析結果と、Euler modelによる結果はほとんど一致している。しかし、短くなるにつれ、Euler modelでは変形は一定であるが、Timoshenko modelでは変形は次第に大きくなる。以上のことより、スパン長の短い場合は、セン断変形の影響はかなり大きいことがわかる。又、両端固定はりの方が、単純支持はりの場合よりその傾向が大きい。それは、両端固定のはりでは支点においてセン断力と曲げモーメントの相互作用が生じるためと考えられる。又、長スパンの場合両者の値がほとんど一致していることから、回転慣性の影響は少ないと考えられる。

(c) 衝撃荷重強度と最大応答の関係におよぼすセン断変形の影響

前述の解析結果より、スパン長の短いはりではセン断変形の影響はかなり大きいことがわかった。そこで、次に衝撃荷重強度と最大応答の関係におよぼすセン断変形の影響を調べてみる。はりにFig-10に示すような最も基本的な衝撃荷重を等分布に載荷する。荷重強度Pを漸次大きくすることによる最大変位の変化を次の3つのケースに

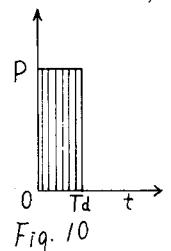


Fig. 10

ついで数値解析する。

A ケース： $L=3.48\text{ m}$ なる普通のスパン長のはりを Euler model により解析する。Euler model の場合はスパン長によってその結果は変化しない。

B ケース： 単純支持はりの場合 $L=4.57\text{ m}$ ，両端固定はりの場合は $L=12.2\text{ m}$ なる普通のスパン長のはりを Timoshenko model により解析する。

C ケース： $L=1.83\text{ m}$ なる短いスパン長のはりを Timoshenko model により解析する。

すなわち，A ケースと他のケースとの解析結果を比較することにせん断変形の影響を調べる。以下解析結果を Fig. 11～14 に示す。 Y_m は最大応答で，塗り潰した点ははりの挙動が塑性領域に入り始めたことを意味する。

Fig. 11, 12 の解析結果は，静的な基準量 Y_g , P_g にはりを Euler beam として計算したものを用いて整理したものである。スパン長の長い場合は Timoshenko model による結果と Euler model による結果はほとんど差はない。しかし，スパン長が短くなると Timoshenko model による結果は Euler model によるものより，かなり小さい荷重で塑性領域に

入り，変形が大きくなる。又，両端固定はりではその傾向が大きい。これより，絶対的な変形量を基準として設計する場合，Euler model による解析結果ではかなり危険側になると考えられる。

Fig. 12, 13 の解析結果は，B ケース，C ケースの場合， Y_g , P_g にはりを Timoshenko Beam として計算したものを使用して整理したものである。単純支持はりの場合，3つのケースはほとんど差がないが，両端固定はりの場合，C ケースでは， $\bar{P}$ が大きくなると Y_m/Y_g が他の2つのケースよりかなり大きくなる。このことは，短スパンの両端固定はりでは支点においてせん断力による塑性ヒンジが生ずるため，崩壊の形式が単純支持はりに近いものと考えられる。

5. むすび

紙面の関係で，数値計算法，数値解析結果などに対する考察などくわしく述べる事ができなかった部分については，当日，講演において説明する。

参考文献

- 1) Robert K. Wen, ASCE, Nurel Beylerian "Elastic-Plastic Response of Timoshenko Beams" ASCE, June, 1967
 - 2) 田中尚著 "構造物の極限解析" 彰国社
- その他

