

九州大学工学部 正員 山崎徳也

〃 〃 正員 彦坂 照

〃 〃 学生員 高橋良明

1. 緒言

合成桁に一定の死荷重モーメントが作用する場合、コンクリートスラブのクリープにより合成桁断面内においてはいわゆる応力の転位を生じ、コンクリートの応力は減少し鋼筋の応力は増加する。また合成桁においてはコンクリートの自由な乾燥収縮が拘束される結果、クリープと似た応力状態を呈し、しかも乾燥収縮応力自身がクリープを伴うものである。

現行の設計示方書によれば、Whitneyの法則に基づくクリープ係数を桁令による補正係数で補正してクリープ応力を近似的に算定することになるが、式中に桁令を含んだAntyuncyan型のクリープ関数を用いて解析すれば、コンクリートのクリープの実体をより忠実に把握した厳密解が得られるはずである。本論文は、ガガの観点から、Antyuncyan⁽¹⁾が鉄筋コンクリートばりのクリープ解析に用いた手法を拡張応用して合成桁のクリープ応力の近似解および厳密解を導き、既往諸理論による結果と比較検討せんとするものである。なお、紙面の都合上、本論では持続荷重によるクリープを主として取り扱い、乾燥収縮応力については結果のみを示すにとどめる。

2. 基本式の誘導

図-1のごとき全合成桁断面を考え、コンクリートスラブの断面積および断面2次モーメントを A_c , I_c , その重心を G_c とし、鋼筋の断面積および断面2次モーメントを A_s , I_s , その重心を G_s とすれば、 G_c と G_s の距離も与えられた値となる。この断面に曲げモーメント M が作用するとき、これはコンクリートおよび鋼筋に作用するモーメント M_c , M_s とそれぞれの重心に働く軸力 N_c , N_s に分

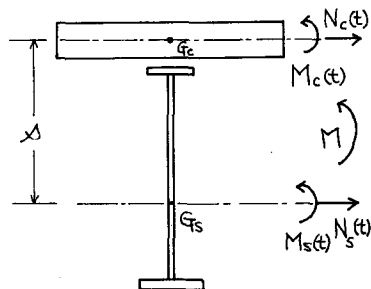


図-1

解され、これら諸力は何れも時間 t の関数となる。軸力および G_s に関するモーメントの釣合いを考えれば、次の式が得られる。

$$N_s(t) = -N_c(t), \quad M_s(t) = M + N_c(t)x - M_c(t) \quad (1)$$

他方、 G_c および G_s より鉛直下方にそれぞれ Z_c 軸、 Z_s 軸をとれば、コンクリートおよび鋼筋の任意点の応力 σ_c , σ_s が次式で求められる。

$$\sigma_c(t) = \frac{N_c(t)}{A_c} + \frac{M_c(t)Z_c}{I_c} \quad (2)$$

$$\sigma_s(t) = \frac{N_s(t)}{A_s} + \frac{M_s(t)Z_s}{I_s} \quad (3)$$

桁令 τ のコンクリートが時間的に変化する応力 $\sigma_c(t)$ を受ける場合、任意時刻 t における総ひずみは

$$\epsilon_c(t) = \frac{\sigma_c(t)}{E_c} - \int_{\tau_0}^t \sigma_c(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} C(\tau, \tau) d\tau$$

で与えられ、また鋼筋のひずみは $\epsilon_s(t) = \sigma_s(t)/E_s$ で与えられる。ただし、 E_c 、 E_s はそれぞれコンクリートおよび鋼筋の弾性係数、 $C(t, \tau)$ は Arutyunyan 型のクリープ関数である。 $C(t, \tau)$ の内容については文献(2)を参照されたい。

平面保持を仮定すれば、まず $[\epsilon_c(t)]_{x=0} = [\epsilon_s(t)]_{x=0}$ が成立しなければならない。すなわち

$$\frac{N_c(t)}{E_c A_c} - \int_0^t \frac{N_c(\tau)}{A_c} \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau = \left\{ \frac{N_s(t)}{A_s} - \frac{M_s(t)}{I_s} \cdot x \right\} / E_s$$

また、コンクリートと鋼筋とが同一回転をなすべき条件より

$$\frac{M_c(t)}{E_c I_c} - \int_0^t \frac{M_c(\tau)}{I_c} \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau = \frac{M_s(t)}{E_s I_s}$$

上記2式の右辺に式(1)を代入して整理すれば次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} (nI_s + A_c I_s / A_s + x^2 A_c) \dot{N}_c(t) - x A_c \dot{M}_c(t) &= -x A_c M + E_s I_s \int_0^t N_c(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau \\ -x I_c \dot{N}_c(t) + (I_c + nI_s) \dot{M}_c(t) &= I_c M + E_s I_s \int_0^t M_c(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式(4)において $t = \tau$ と置けば、 N_c および M_c の $t = \tau$ における初期値が次のごとく求められる。

$$N_c(t_0) = -\frac{M \cdot n x A_c}{C I_s}, \quad M_c(t_0) = M \cdot (n + \frac{A_c}{A_s}) I_c / C I_s \quad (5)$$

$$\text{ただし、} C = (n + \frac{I_c}{I_s}) (n + \frac{A_c}{A_s}) + \frac{n x^2 A_c}{I_s}$$

さて、式(4)の両辺を t で1回微分して整理すれば、

$$\left. \begin{aligned} (nI_s + \frac{A_c I_s}{A_s} + x^2 A_c) \ddot{N}_c(t) - x A_c \ddot{M}_c(t) &= E_s I_s \left[x C^{-x} \int_0^t N_c(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \{g(\tau) C^{x\tau}\} d\tau - x g(t) N_c(t) \right] \\ -x I_c \ddot{N}_c(t) + (I_c + nI_s) \ddot{M}_c(t) &= E_s I_s \left[x C^{-x} \int_0^t M_c(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \{g(\tau) C^{x\tau}\} d\tau - x g(t) M_c(t) \right] \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式(6)の両辺をさらに t で1回微分し、式(6)との間で積分項を消去すれば、 $N_c(t)$ と $M_c(t)$ に関する必要の基礎微分方程式が得られ、途中演算を省略して結果のみを示せば次のごとくである。

$$\left. \begin{aligned} (nI_s + \frac{A_c I_s}{A_s} + x^2 A_c) \ddot{N}_c(t) - x A_c \ddot{M}_c(t) + x \left\{ (nI_s + \frac{A_c I_s}{A_s} + x^2 A_c) + E_s I_s g(t) \right\} \dot{N}_c(t) - x x A_c \dot{M}_c(t) &= 0 \\ -x I_c \ddot{N}_c(t) + (I_c + nI_s) \ddot{M}_c(t) - x x I_c \dot{N}_c(t) + x \left\{ (I_c + nI_s) + E_s I_s g(t) \right\} \dot{M}_c(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

3. 近似解法 I

一般に $M_c(t)$ の時間的変化はかなり小さいゆえこれを無視して $M_c(t) = \text{const} = M_c(t_0)$ と置き近似解を求めてみる。この場合 $\dot{M}_c(t) = \ddot{M}_c(t) = 0$ であるから式(7)の1式より

$$(nI_s + \frac{A_c I_s}{A_s} + x^2 A_c) \ddot{N}_c(t) + x \left\{ (nI_s + \frac{A_c I_s}{A_s} + x^2 A_c) + E_s I_s g(t) \right\} \dot{N}_c(t) = 0$$

この微分方程式の解は容易に次のごとく求められる。

$$N_c(t) = N_c(t_0) + \dot{N}_c(t_0) \int_{t_0}^t e^{-\eta(\tau)} d\tau$$

$$\text{ただし、} \eta(t) = x \int_{t_0}^t \left\{ 1 + \frac{E_s I_s}{n I_s + A_c I_s / A_s + x^2 A_c} g(\tau) \right\} d\tau$$

また $N_c(t)$ は式(5)より、 $\dot{N}_c(t_1)$ は式(6) のオ1式で $t=t_1$ と置いて

$$\dot{N}_c(t_1) = - \frac{\gamma E_s I_s \varphi(t_1)}{n I_s + A_c I_s / A_s + \gamma^2 A_c} N_c(t_1)$$

と求むられ、結局 $N_c(t)$ が次式で得られることになる。

$$N_c(t) = -M \cdot \frac{\gamma A_c}{C I_s} \left\{ 1 - \frac{\gamma E_s I_s \varphi(t_1)}{n I_s + A_c I_s / A_s + \gamma^2 A_c} \int_{t_1}^t e^{-\gamma \omega} d\tau \right\} \quad (8)$$

4. 近似解法Ⅱ

上述の近似解法Ⅰでは $M_c(t)$ の時間的变化を全く無視したが、ここではこれを考慮しに より精度の高い近似解を求めてみる。以下 $M_c(t)$ は $N_c(t)$ に比して極めて小さく無視できるものとする。

しかると式(7)は次のごとく簡単になる。

$$\left. \begin{aligned} (n I_s + \frac{A_c I_s}{A_s} + \gamma^2 A_c) \ddot{N}_c(t) + \gamma \left\{ (n I_s + \frac{A_c I_s}{A_s} + \gamma^2 A_c) + E_s I_s \varphi(t) \right\} \dot{N}_c(t) &= 0 \\ n I_s \ddot{M}_c(t) + \gamma n I_s \{ 1 + E_c \varphi(t) \} \dot{M}_c(t) &= \gamma I_c \{ \ddot{N}_c(t) + \gamma \dot{N}_c(t) \} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式(9)のオ1式は近似解法Ⅰで取り扱ったものと全く同じであるゆえ、 $N_c(t)$ の解は式(8)で与えられることになる。これを式(9)のオ2式の右辺に代入して $M_c(t)$ を求めれば、

$$M_c(t) = M_c(t_1) + \int_{t_1}^t e^{-\gamma \omega} \left[\dot{M}_c(\tau) + \frac{\gamma I_c}{n I_s} \int_{t_1}^{\tau} \{ \ddot{N}_c(\tau) + \gamma \dot{N}_c(\tau) \} e^{\gamma \omega} d\tau \right] d\tau \quad (10)$$

$$\text{ここに } \bar{\gamma}(t) = \gamma \int_{t_1}^t \{ 1 + E_c \varphi(\tau) \} d\tau$$

また $M_c(t_1)$ は式(5)より、 $\dot{M}_c(t_1)$ は式(6)のオ2式で $t=t_1$ と置いて

$$\dot{M}_c(t_1) = \frac{\gamma I_c \dot{N}_c(t_1)}{n I_s} - \gamma E_c \varphi(t_1) M_c(t_1)$$

と求むられる。

5. 厳密解法

本題の合成桁のグリーンフの厳密解をうるためには、式(7)の連立2階常微分方程式を解かねばならない。いま $\gamma \dot{N}_c(t) = y_1(t)$ 、 $\dot{M}_c(t) = y_2(t)$ と置けば、 $\gamma \ddot{N}_c(t) = \dot{y}_1(t)$ 、 $\ddot{M}_c(t) = \dot{y}_2(t)$ となるゆえ、式(7)を $y_1(t)$ 、 $y_2(t)$ に関する2元連立1次方程式と見て解けば、次の連立1階常微分方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} C \dot{y}_1(t) + P_1(t) \cdot y_1(t) + Q_1(t) \cdot y_2(t) &= 0 \\ C \dot{y}_2(t) + P_2(t) \cdot y_1(t) + Q_2(t) \cdot y_2(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\text{ただし、} P_1(t) = \gamma C + \gamma \left(n + \frac{I_c}{I_s} \right) E_s \varphi(t), \quad Q_1(t) = \gamma \gamma^2 A_c E_s \varphi(t) / I_s$$

$$P_2(t) = \frac{\gamma I_c E_s \varphi(t)}{I_s}, \quad Q_2(t) = \gamma C + \gamma \left(n + \frac{A_c}{A_s} + \frac{\gamma^2 A_c}{I_s} \right) E_s \varphi(t)$$

文献(2)に示すごとく、式(11)の解は古典的求積法を用いて容易に求むられ、結果の明示せば次のごとくである。

$$\begin{aligned} N_c(t) &= N_c(t_1) + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left\{ \lambda_1 \{ \dot{N}_c(t) + \lambda_2 \dot{M}_c(t) / A \} \int_{t_1}^t e^{-\lambda_2(t-\tau)} d\tau - \lambda_2 \{ \dot{N}_c(t) + \lambda_1 \dot{M}_c(t) / A \} \int_{t_1}^t e^{-\lambda_1(t-\tau)} d\tau \right\} \\ M_c(t) &= M_c(t_1) + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left\{ A \dot{N}_c(t) + \lambda_1 \dot{M}_c(t) \right\} \int_{t_1}^t e^{-\lambda_2(t-\tau)} d\tau - \left\{ A \dot{N}_c(t) + \lambda_2 \dot{M}_c(t) \right\} \int_{t_1}^t e^{-\lambda_1(t-\tau)} d\tau \end{aligned}$$

ただし、 λ_1, λ_2 は λ の 2 次方程式 $I_c \lambda^2 + (I_c - A^2 A_c - A_c I_s / A_s) \lambda - A^2 A_c = 0$ の 2 実根である。

$$\text{また、} \quad \eta_1(t) = -\frac{1}{C} \int_{t_1}^t \{ P(\tau) + \lambda_1 R(\tau) \} d\tau, \quad \eta_2(t) = -\frac{1}{C} \int_{t_1}^t \{ P(\tau) + \lambda_2 R(\tau) \} d\tau$$

さらに $\dot{N}_c(t)$ および $\dot{M}_c(t)$ は式(6)で $t = t_1$ と置いて得られる連立方程式を解くことにより

$$\dot{N}_c(t_1) = \frac{1}{C^2} \times E_s g(t_1) M \frac{A A_c}{I_s} \left(n^2 - \frac{I_c A_c}{I_s A_s} \right), \quad \dot{M}_c(t_1) = -\frac{1}{C^2} \times E_s g(t_1) M \frac{I_c}{I_s} \left\{ \left(n + \frac{A_c}{A_s} \right)^2 + \frac{A_s}{A_s} \cdot \frac{A A_c}{I_s} \right\}$$

と求わられる。

6. 計算例

図-2 のごとき断面の全合成桁を対象に、クリープおよび乾燥収縮によるコンクリートの上縁、下縁応力 σ_{c1}, σ_{c2} 、および鋼桁の下縁、上縁応力 σ_{s1}, σ_{s2} を、まず近似解法Ⅰを用いて算定した。ただし、弾性定数を $E_s = 2.1 \times 10^6$

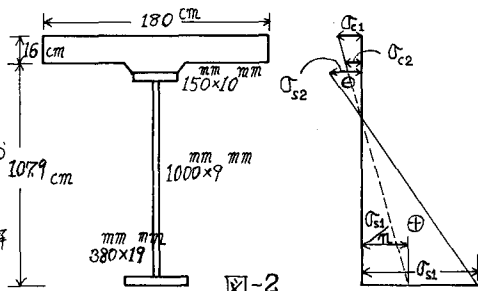


図-2

$\text{kg/cm}^2, n=7$ とし、クリープ関数は $\delta = 0.026$

$g(t) = (x.82/t + 0.9) \times 10^{-5}$ を用いた。また

コンクリートの最終収縮ひずみを、

$S_0 = 18 \times 10^{-5}$ とし、自由乾燥収縮ひずみは

$S_n(t) = S_0 [1 - e^{-\gamma(t-t_1)}]$ の時間的変化をする

ものと仮定した。図-3 は、死荷重モーメント $M = 56 \text{ t} \cdot \text{m}$ による当初 ($t = t_1 = 28$ 日) の

応力 $\sigma_{c1} = -24.2 \text{ kg/cm}^2, \sigma_{c2} = -12.2 \text{ kg/cm}^2, \sigma_{s1} = 483$

$\text{kg/cm}^2, \sigma_{s2} = -59 \text{ kg/cm}^2$ が時間的に変化する模

様をプロットしたもので、 σ_{s2} にクリープの

影響が著るしく表われていることがわかる。また載荷時のコンクリ

ートの状態を 18 日、28 日、38 日と変化させて、各応力の t を無限大に

した最終値を求めてみれば表-1 の結果がえられる。乾燥収縮の影響も、

図-4 の時間変化曲線から明らかなごとく、 σ_{s2} に顕著に表

われている。なお、近似解法Ⅱおよび厳密解法による結果との比較

吟味等については講演当日報告する。

〔参考文献〕

(1) N.Kh. Arutyunyan: Some Problems in the Theory of Creep Concrete Structures. Pergamon Press. 1966.

(2) 山崎・寿坂・渡鉄筋コンクリートはりのクリープおよび乾燥収縮応力の解法 才25日土木学会年次学術講演会講演概要, 昭和45年11月。

(3) 福田・安宅・友永: 橋梁工学, オーム社, 昭和42年6月

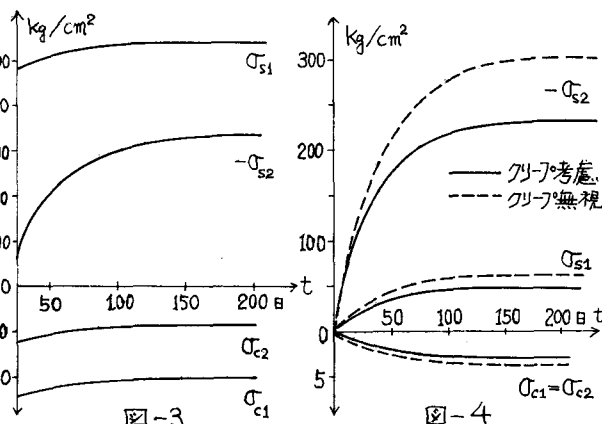


表-1 単位 kg/cm^2

t_1	σ_{c1}	σ_{c2}	σ_{s1}	σ_{s2}
18日	-20.5	-8.4	544	-355
28日	-20.7	-8.7	540	-333
38日	-20.9	-8.8	538	-324