

I-82 複鉄筋コンクリートばりのクリープおよび乾燥収縮応力の解法

九州大学工学部 正員 山崎徳也

正員 〇彦坂 照

1. 緒言

持続荷重を受けるコンクリート構造物がクリープによって変形を増大すること、同時に内部応力も充分時間の経過した後は通常の弾性計算による値と全く異なってくることはよく知られており、特に合成桁やPC構造物の設計では重要な要素になっている。また、コンクリートの乾燥収縮は、鉄筋コンクリート部材において一般にコンクリートに引張応力を生じひび割れ発生の危険をもたらすほか、上記の合成桁やPC構造物でもクリープとともに無視しえない現象であり、しかも乾燥収縮応力自身がクリープを伴うため、解析は甚だ面倒になる。このため、例えば従来合成桁の設計に用いられてきた近似公式では、スラブに作用する曲げモーメントの時間的変化を無視しており、また最近施工例を多く見るPC合成桁ではプレカストPC桁と現場打ちスラブとのクリープ特性の差が応力に大きな影響を与えるが、これも通常同一クリープ特性を用いて解析されている。

これらの要素を厳密に考慮すれば、2つの独立な断面力、すなわち軸力と曲げモーメントの時間に関する連立微分方程式を解く必要があるが、本論で取り扱う複鉄筋コンクリートばりも、引張および圧縮の面鉄筋がコンクリートのクリープに対してそれぞれ独立の影響を及ぼし、連立微分方程式と解かねばならぬ点で共通性があり、本研究の目的である複鉄筋ばりのクリープ挙動の解明とは別に、本論の手法を上記構造物のクリープの厳密解析に拡張できることが予想される¹⁾。

なお本論では、断面の都合上クリープを考慮した乾燥収縮応力の解法を主として述べ、持続荷重によるクリープについては結果のみを示すにとどめる。

2. 基礎微分方程式の誘導

図-1のごとき一軸対称の複鉄筋断面を考え、コンクリートだけの重心軸G-Gから引張、圧縮面鉄筋の重心までの距離をそれぞれ a_1 , a_2 とする。(以下において、鉄筋の断面力、応力、断面諸量等は、引張鉄筋に対して1, 圧縮鉄筋に対して2の添字を付けて表すことにする)。鉄筋およびコンクリート断面の図心に作用する軸力を

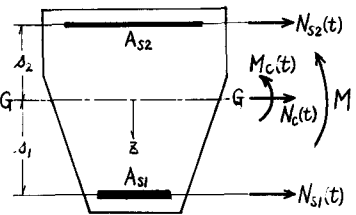


図-1

N_s および N_c , またコンクリート断面の曲げモーメントを M_c とすれば、クリープおよび乾燥収縮を考慮する場合これらは何れも時間 t の関数であり、軸力およびG-G軸に関するモーメントの釣合より次式が成立する。

$$N_c(t) + N_{s1}(t) + N_{s2}(t) = 0, \quad M_c(t) + N_{s1}(t)a_1 - N_{s2}(t)a_2 = M \quad (1)$$

ただし、 M は複鉄筋断面に作用する外力モーメントであり、乾燥収縮応力の解析では $M=0$ としてよい。鉄筋の断面積および応力をそれぞれ A_s , σ_s で表わせば、 $N_{s1}(t) = A_{s1}\sigma_{s1}(t)$, $N_{s2}(t) = A_{s2}\sigma_{s2}(t)$ となるゆえ式(1)より次式がえられる。

$$N_c(t) = -A_{s1}\sigma_{s1}(t) - A_{s2}\sigma_{s2}(t), \quad M_c(t) = -A_{s1}a_1\sigma_{s1}(t) + A_{s2}a_2\sigma_{s2}(t) \quad (2)$$

他方、コンクリートの断面積およびG-G軸に関する断面2次モーメントをそれぞれ A_c , I_c とすれば、G-G軸より z の位置におけるコンクリートの応力 σ_c が次式で求められる。

$$\sigma_c(t) = N_c(t)/A_c + M_c(t)z/I_c \quad (3)$$

式(3)に式(2)を代入して整理すれば、

$$\sigma_c(t) = -P_1(1+\beta_1 z/A_1)\sigma_{s1}(t) - P_2(1-\beta_2 z/A_2)\sigma_{s2}(t) \quad (4)$$

$$\text{ここに、 } P_1 = A_{s1}/A_c, \quad P_2 = A_{s2}/A_c, \quad \beta_1 = A_c A_1^2/I_c, \quad \beta_2 = A_c A_2^2/I_c$$

いま、材令 τ のコンクリートが乾燥収縮を起しかつ時間的に変化する応力 $\sigma_c(t)$ を受ける場合の、時刻 t における総ひずみ $\varepsilon_c(t)$ は、コンクリートの弾性係数を E_c 、自由乾燥収縮ひずみを $S_n(t)$ とし、Arutyunyan²⁾型のフリース関数 $C(t, \tau) = \varphi(\tau)[1 - e^{-\delta(t-\tau)}]$ を用いて次式で表わされる。

$$\varepsilon_c(t) = \sigma_c(t)/E_c - \int_{\tau_i}^t \sigma_c(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau - S_n(t) \quad (5)$$

ここに、 δ は定数、 $\varphi(\tau)$ は材令 τ のみの関数で、例えば $\varphi(\tau) = \alpha e^{-\beta\tau}$ または $\varphi(\tau) = \alpha/\tau + \beta$ (α, β は定数)の形をとる。また $S_n(t)$ はフリース関数と同形の $S_n(t) = S_0[1 - e^{-\delta(t-\tau_i)}]$ と仮定する。ただし S_0 は最終収縮ひずみである。

式(4)を式(5)に代入し、平面保持の仮定より

$$z = A_1 \text{ において } \varepsilon_c(t) = \sigma_{s1}(t)/E_s, \quad z = -A_2 \text{ において } \varepsilon_c(t) = \sigma_{s2}(t)/E_s \quad (E_s \text{ は鉄筋のヤング係数})$$

を考慮すれば、次式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} \{1 + \pi P_1(1 + \beta_1)\} \dot{\sigma}_{s1}(t) + \pi P_2(1 - \beta_2) \dot{\sigma}_{s2}(t) &= E_s \int_{\tau_i}^t \{P_1(1 + \beta_1) \dot{\sigma}_{s1}(\tau) + P_2(1 - \beta_2) \dot{\sigma}_{s2}(\tau)\} \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau - E_s S_n(t) \\ \pi P_1(1 - \beta_1) \dot{\sigma}_{s1}(t) + \{1 + \pi P_2(1 + \beta_2)\} \dot{\sigma}_{s2}(t) &= E_s \int_{\tau_i}^t \{P_1(1 - \beta_1) \dot{\sigma}_{s1}(\tau) + P_2(1 + \beta_2) \dot{\sigma}_{s2}(\tau)\} \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau - E_s S_n(t) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\text{ただし、 } n = E_s/E_c, \quad \beta_3 = A_c A_1 A_2/I_c$$

式(6)の両辺を t で1回微分して整理すれば、

$$\left. \begin{aligned} \{1 + \pi P_1(1 + \beta_1)\} \ddot{\sigma}_{s1}(t) + \pi P_2(1 - \beta_2) \ddot{\sigma}_{s2}(t) &= E_s \left[\delta e^{-\delta t} \int_{\tau_i}^t \{P_1(1 + \beta_1) \dot{\sigma}_{s1}(\tau) + P_2(1 - \beta_2) \dot{\sigma}_{s2}(\tau)\} \frac{\partial}{\partial \tau} \{\varphi(\tau) e^{\delta \tau}\} d\tau - \delta \varphi(t) \{P_1(1 + \beta_1) \dot{\sigma}_{s1}(t) + P_2(1 - \beta_2) \dot{\sigma}_{s2}(t)\} - \dot{S}_n(t) \right] \\ \pi P_1(1 - \beta_1) \ddot{\sigma}_{s1}(t) + \{1 + \pi P_2(1 + \beta_2)\} \ddot{\sigma}_{s2}(t) &= E_s \left[\delta e^{-\delta t} \int_{\tau_i}^t \{P_1(1 - \beta_1) \dot{\sigma}_{s1}(\tau) + P_2(1 + \beta_2) \dot{\sigma}_{s2}(\tau)\} \frac{\partial}{\partial \tau} \{\varphi(\tau) e^{\delta \tau}\} d\tau - \delta \varphi(t) \{P_1(1 - \beta_1) \dot{\sigma}_{s1}(t) + P_2(1 + \beta_2) \dot{\sigma}_{s2}(t)\} - \dot{S}_n(t) \right] \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式(7)の両辺をさらに t で1回微分し、式(7)との間で積分項を消去のうえ整理すれば、所要の基礎微分方程式が次のごとく導かれる。

$$\left. \begin{aligned} \{1 + \pi P_1(1 + \beta_1)\} \ddot{\sigma}_{s1}(t) + \pi P_2(1 - \beta_2) \ddot{\sigma}_{s2}(t) + \delta \{1 + \pi P_1(1 + \beta_1) + P_1(1 + \beta_1) E_s \varphi(t)\} \dot{\sigma}_{s1}(t) + \delta P_2(1 - \beta_2) \{n + E_s \varphi(t)\} \dot{\sigma}_{s2}(t) &= 0 \\ \pi P_1(1 - \beta_1) \ddot{\sigma}_{s1}(t) + \{1 + \pi P_2(1 + \beta_2)\} \ddot{\sigma}_{s2}(t) + \delta P_1(1 - \beta_1) \{n + E_s \varphi(t)\} \dot{\sigma}_{s1}(t) + \delta \{1 + \pi P_2(1 + \beta_2) + P_2(1 + \beta_2) E_s \varphi(t)\} \dot{\sigma}_{s2}(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

3. 解法

式(8)の連立2階常微分方程式は、まず $\dot{\sigma}_{s1}(t) = y_1(t)$, $\dot{\sigma}_{s2}(t) = y_2(t)$ と置くことにより階数を1階下げることができる。次いで同式を $\dot{y}_1(t)$, $\dot{y}_2(t)$ に関する2元連立1次方程式と見て解けば次の連立1階常微分方程式がえられる。

$$C \cdot \dot{y}_1(t) + P_1(t) \cdot y_1(t) + Q_1(t) \cdot y_2(t) = 0 \quad (9)_a$$

$$C \cdot \dot{y}_2(t) + P_2(t) \cdot y_1(t) + Q_2(t) \cdot y_2(t) = 0 \quad (9)_b$$

$$\text{ただし、 } C = \{1 + \pi P_1(1 + \beta_1)\} \{1 + \pi P_2(1 + \beta_2)\} - \pi^2 P_1 P_2 (1 - \beta_3)^2$$

$$P_1(t) = \delta C + \delta \{P_1(1 + \beta_1) \{1 + \pi P_2(1 + \beta_2)\} - \pi P_1 P_2 (1 - \beta_3)^2\} E_s \varphi(t), \quad Q_1(t) = \delta P_2(1 - \beta_2) E_s \varphi(t)$$

$$P_2(t) = \delta P_1(1 - \beta_1) E_s \varphi(t), \quad Q_2(t) = \delta C + \delta \{P_2(1 + \beta_2) \{1 + \pi P_1(1 + \beta_1)\} - \pi P_1 P_2 (1 - \beta_3)^2\} E_s \varphi(t)$$

式(9)₂に後に適宜に定める λ の関数 $\lambda(t)$ を乗じて式(9)₁に加えれば、

$$C\{\dot{y}_1(t)+\lambda(t)\dot{y}_2(t)\}+\{P_1(t)+\lambda(t)P_2(t)\}y_1(t)+\{Q_1(t)+\lambda(t)Q_2(t)\}y_2(t)=0 \quad (10)$$

ここで $y_1(t)+\lambda(t)y_2(t)=u(t)$ とおけば $y_1(t)=u(t)-\lambda(t)y_2(t)$, $\dot{y}_1(t)=\dot{u}(t)-\dot{\lambda}(t)y_2(t)-\lambda(t)\dot{y}_2(t)$

したがって式(10)は

$$C\{\dot{u}(t)-\dot{\lambda}(t)y_2(t)\}+\{P_1(t)+\lambda(t)P_2(t)\}\{u(t)-\lambda(t)y_2(t)\}+\{Q_1(t)+\lambda(t)Q_2(t)\}y_2(t)=0$$

上式を書き直せば

$$C\dot{u}(t)+\{P_1(t)+\lambda(t)P_2(t)\}u(t)-y_2(t)\{C\dot{\lambda}(t)+\{P_1(t)+\lambda(t)P_2(t)\}\lambda(t)-\{Q_1(t)+\lambda(t)Q_2(t)\}\}=0 \quad (11)$$

式(11)において $y_2(t)$ は第3項のみに含まれるゆえ、第3項が零になるように $\lambda(t)$ を定めることにする。

$$C\dot{\lambda}(t)+\{P_1(t)+\lambda(t)P_2(t)\}\lambda(t)-\{Q_1(t)+\lambda(t)Q_2(t)\}=0$$

$$=C\dot{\lambda}(t)+P_2(t)\lambda^2(t)+\{P_1(t)-Q_2(t)\}\lambda(t)-Q_1(t)=0$$

$$\text{すなわち } C\dot{\lambda}(t)+E_s\varphi(t)\{P_1(1-\beta_3)\dot{\lambda}^2(t)+\{P_1(1+\beta_1)-P_2(1+\beta_2)\}\lambda(t)-P_2(1-\beta_3)\}=0 \quad (12)$$

$$\lambda \text{ の 2 次方程式 } P_1(1-\beta_3)\lambda^2+\{P_1(1+\beta_1)-P_2(1+\beta_2)\}\lambda-P_2(1-\beta_3)=0$$

は明らかに2実根をもつのでそれらを λ_1 , λ_2 とすれば、 $\lambda(t)=\lambda_1$ および $\lambda(t)=\lambda_2$ は式(12)の微分方程式の2つの特殊解である。したがって、式(11)より次式がえられることになる。

$$C\dot{u}_1(t)+\{P_1(t)+\lambda_1 P_2(t)\}u_1(t)=0, \quad C\dot{u}_2(t)+\{P_1(t)+\lambda_2 P_2(t)\}u_2(t)=0 \quad (13)$$

$$\text{式(13)を解いて } u_1(t)=u_1(\tau_1)e^{-\mathcal{Q}_1(t)}, \quad u_2(t)=u_2(\tau_2)e^{-\mathcal{Q}_2(t)}$$

$$\text{ただし } u_1(\tau_1)=y_1(\tau_1)+\lambda_1 y_2(\tau_1), \quad u_2(\tau_2)=y_1(\tau_2)+\lambda_2 y_2(\tau_2)$$

$$\mathcal{Q}_1(t)=\frac{1}{C}\int_{\tau_1}^t\{P_1(\tau)+\lambda_1 P_2(\tau)\}d\tau, \quad \mathcal{Q}_2(t)=\frac{1}{C}\int_{\tau_2}^t\{P_1(\tau)+\lambda_2 P_2(\tau)\}d\tau$$

よって $y_1(t)+\lambda_1 y_2(t)=u_1(t)$, $y_1(t)+\lambda_2 y_2(t)=u_2(t)$ であるから、これを連立に解いて

$$y_1(t)=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\{\lambda_1 u_2(t)-\lambda_2 u_1(t)\}, \quad y_2(t)=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\{u_1(t)-u_2(t)\}$$

$$\text{すなわち } \dot{\mathcal{Q}}_{s1}(t)=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\{\lambda_1\{\dot{\mathcal{Q}}_{s1}(\tau_1)+\lambda_2\dot{\mathcal{Q}}_{s2}(\tau_1)\}e^{-\mathcal{Q}_1(t)}-\lambda_2\{\dot{\mathcal{Q}}_{s1}(\tau_1)+\lambda_1\dot{\mathcal{Q}}_{s2}(\tau_1)\}e^{-\mathcal{Q}_2(t)}\}$$

$$\dot{\mathcal{Q}}_{s2}(t)=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\{\{\dot{\mathcal{Q}}_{s1}(\tau_1)+\lambda_1\dot{\mathcal{Q}}_{s2}(\tau_1)\}e^{-\mathcal{Q}_1(t)}-\{\dot{\mathcal{Q}}_{s1}(\tau_2)+\lambda_2\dot{\mathcal{Q}}_{s2}(\tau_2)\}e^{-\mathcal{Q}_2(t)}\}$$

初期条件 $\mathcal{Q}_{s1}(\tau_1)=\mathcal{Q}_{s2}(\tau_2)=0$ を考慮すれば、結局フリースを考慮した引張、圧縮面鉄筋の乾燥収縮応力が次式で求められることになる。

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{Q}_{s1}(t) &= \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2} \left[\lambda_1 \{ \dot{\mathcal{Q}}_{s1}(\tau_1) + \lambda_2 \dot{\mathcal{Q}}_{s2}(\tau_1) \} \int_{\tau_1}^t e^{-\mathcal{Q}_1(\tau)} d\tau - \lambda_2 \{ \dot{\mathcal{Q}}_{s1}(\tau_1) + \lambda_1 \dot{\mathcal{Q}}_{s2}(\tau_1) \} \int_{\tau_1}^t e^{-\mathcal{Q}_2(\tau)} d\tau \right] \\ \mathcal{Q}_{s2}(t) &= \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2} \left[\{ \dot{\mathcal{Q}}_{s1}(\tau_1) + \lambda_1 \dot{\mathcal{Q}}_{s2}(\tau_1) \} \int_{\tau_1}^t e^{-\mathcal{Q}_1(\tau)} d\tau - \{ \dot{\mathcal{Q}}_{s1}(\tau_2) + \lambda_2 \dot{\mathcal{Q}}_{s2}(\tau_2) \} \int_{\tau_2}^t e^{-\mathcal{Q}_2(\tau)} d\tau \right] \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式(14)の定数 $\dot{\mathcal{Q}}_{s1}(\tau_1)$, $\dot{\mathcal{Q}}_{s2}(\tau_2)$ は式(7)で $t=\tau_1$ とおいて次のごとく求められる。

$$\dot{\mathcal{Q}}_{s1}(\tau_1)=\frac{\mathcal{E}}{C}\{1+\pi P_2(\beta_2+\beta_3)\}E_s S_0, \quad \dot{\mathcal{Q}}_{s2}(\tau_2)=\frac{\mathcal{E}}{C}\{1+\pi P_1(\beta_1+\beta_3)\}E_s S_0$$

式(14)より $\mathcal{Q}_{s1}(t)$, $\mathcal{Q}_{s2}(t)$ が求まれば、コンクリートの応力は式(4)よりえられることになる。

4. 持続荷重による曲げフリース

この場合は式(1)において持続荷重による曲げモーメント M を考慮する。以後の誘導過程は上述の乾燥収縮応力の解法と全く同様であり、式(14)の左辺をそれぞれ $\mathcal{Q}_{s1}(t)-\mathcal{Q}_{s1}(\tau_1)$, $\mathcal{Q}_{s2}(t)-\mathcal{Q}_{s2}(\tau_2)$ とするだけでよい。ただし、 $\mathcal{Q}_{s1}(\tau_1)=[\pi P_2(1-\beta_3)\mathcal{A}_2+\{1+\pi P_2(1+\beta_2)\}\mathcal{A}_1]\eta M/I_c C$, $\mathcal{Q}_{s2}(\tau_2)=-[\pi P_1(1-\beta_3)\mathcal{A}_1+\{1+\pi P_1(1+\beta_1)\}\mathcal{A}_2]\eta M/I_c C$

$$\dot{\sigma}_{s1}(t) = \delta E_c \varphi(t) \left\{ \left[(1 + n p_2 (1 + \delta_2))^2 + n^2 p_2 (1 - \delta_2)^2 \right] A_1 + n p_2 (1 - \delta_2) \left\{ 2 + n p_1 (1 + \delta_1) + n p_2 (1 + \delta_2) \right\} A_2 \right\} n M / I_c C^2$$

$$\dot{\sigma}_{s2}(t) = -\delta E_c \varphi(t) \left\{ \left[(1 + n p_1 (1 + \delta_1))^2 + n^2 p_1 (1 - \delta_1)^2 \right] A_2 + n p_1 (1 - \delta_1) \left\{ 2 + n p_1 (1 + \delta_1) + n p_2 (1 + \delta_2) \right\} A_1 \right\} n M / I_c C^2$$

式(4)に対応するコンクリートの応力は $\sigma_c(t) = M z / I_c - p_1 (1 + \delta_1 z / A_1) \sigma_{s1}(t) - p_2 (1 - \delta_2 z / A_2) \sigma_{s2}(t)$

5. 算例および考察

図-2のごとき矩形および丁形断面の鉄筋コンクリートを対象に、引張、圧縮面鉄筋比 p_1, p_2 の種々の組み合わせについて乾燥収縮応力および持続荷重による曲げクリープ応力の算定を行った。ただし、 $E_s = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$,

$n = 10$, $\gamma = 0.026$, $\varphi(t) = (4.82/t + 0.9) \times 10^{-5}$,

$\delta_s = 30 \times 10^{-5}$ の諸値を用い、 t_1 は乾燥収縮に対して1日、持続荷重に対して28日とした。

図-3(a), (b)は、矩形断面で $p_1 = 1.5\%$, $p_2 = 0.5\%$ の複鉄筋ばりにつき、引張、圧縮面鉄筋および上下縁コンクリートの乾燥収縮応力の時間変化曲線を、フリープ考慮および無視のそれぞれの場合に対して求めたものである。フリープを考慮する場合 σ_{c1} および σ_{s1} に見られる応力軽減効果が σ_{s2} に対してはさほど顕著でなく、複鉄筋断面の σ_{c2} においては逆に応力を増加させていることがわかる。

次に、 $p_1 = 2\%$ の矩形および丁形断面につき圧縮鉄筋比 p_2 を0から2%まで変化させ、 t を無限大にした最終乾燥収縮応力をフリープ考慮・無視のそれぞれの場合に対して

算定した。図-4(a), (b)はこれをまとめたもので、丁形断面の σ_{c1} にフリープの影響が著るしく表われている。

持続荷重によるクリープについても、 $p_1 = 2\%$ の矩形および丁形断面につき上と同じく p_2 を変化させ、各応力の $t = t_1$ における初期値と t を無限大にした最終応力との比を図-5にプロットした。引張鉄筋に比べて圧縮鉄筋の応力はフリープの影響で増加率が大きく、丁形断面では特にこの傾向が強く表われている。

【参考文献】

- 1) 山崎, 彦坂, 高橋: 合成桁のフリープに関する2, 3の考察。第25回土木学会年次学術講演会講演概要。昭和45年11月。
- 2) N. K. Arutyunyan: Some Problems in the Theory of Creep in Concrete Structures. Pergamon Press. 1966.

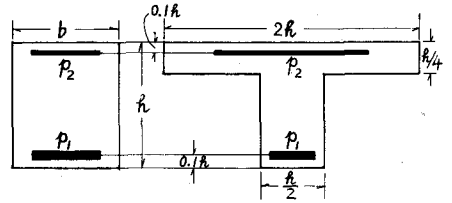


図-2

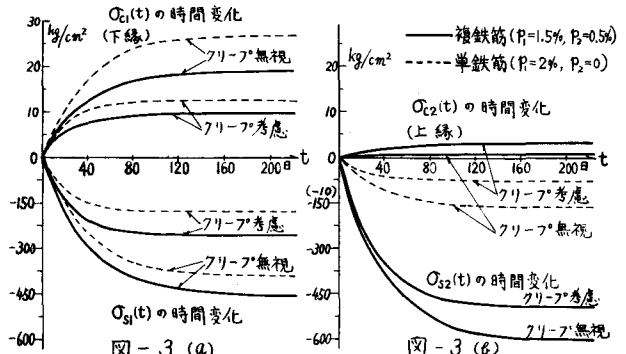


図-3(a)

図-3(b)

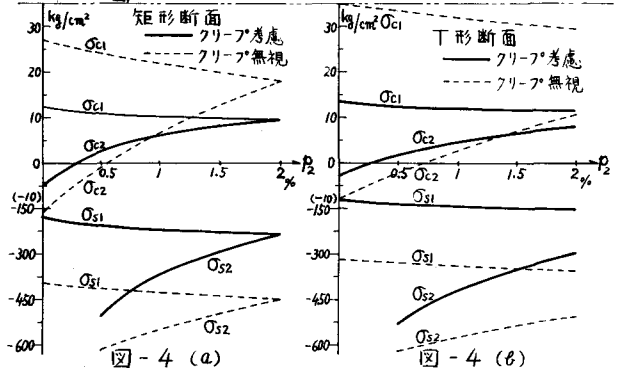


図-4(a)

図-4(b)

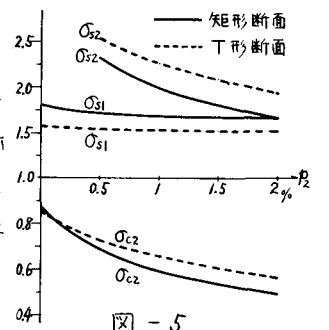


図-5