

I-81 一様な捩りモーメントを受ける棒の弾塑性応力について

鹿島建設KK正員。伊集院 久光
宮崎大学工学部正員 太田 俊昭

I. 序言 本論文は一様な捩りモーメントを受ける棒の応力ならびに変形を弾性限界より完全塑性に到るまで逐一明らかにせんとするもので、解析手法を一般化するため、膜理論に基づく差分法を採用し、computer にする捩り応力の数値解析法の確立を試みるものである。

ここでは応用例として矩形およびI形断面棒を選び、それぞれの降伏領域の遷移状況や内部捩り応力などを解明する。

II. 基礎的考察 一様な断面棒を考え、直交座標 (x, y, z) を図-1のようを設定する。この棒が x 軸まわりに T なる一様な捩りモーメントで捩られ、 y 軸および z 軸方向にそれぞれせん断応力 τ_{yx} および τ_{zx} を生じたと仮定する。

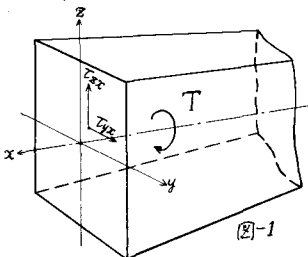


図-1

いま、せん断応力を慣用の捩りの応力関数 χ を用いて

$$\tau_{yx} = \partial \chi / \partial z, \quad \tau_{zx} = -\partial \chi / \partial y \quad (1)$$

で表わせば、文献(1)より弾性域および塑性域においてそれぞれ次の条件式が成立する。

$$\text{弾性域 ; } \partial^2 \chi^e / \partial y^2 + \partial^2 \chi^e / \partial z^2 = -2\omega G \quad (2)$$

$$\text{塑性域 ; } |\text{grad } \chi^p| = k \quad (3)$$

ただし $k = \sigma_y / \sqrt{3}$, $\sigma_y = k$: 降伏せん断応力, σ_y : 降伏垂直応力, ω : 単位長に当りの捩れ角, G : せん断弾性係数, χ^e, χ^p : 弾性域および塑性域の捩りの応力関数。

式(2)(3)に膜理論を適用すれば、結局次のようになる。すなわち、一様な単位張力で張られた石ケン膜が、上向き圧力 ωG を受けるとき、膜の示す自由なため、弾性捩り応力関数 χ^e を表わし、一方の塑性捩り応力関数 χ^p は例えば矩形断面の場合では図-2のような一定勾配 k の屋根の高さ C となる。(したがって χ^e からの屋根に接した部分が塑性域をそうでない部分が弾性域を表わすことになる。

III. 解法 任意の応力状態に対して前述の条件を満足する χ を求めるため、本研究では式(2)(3)を差分表示し、後述のごとき差分法による応力解法を採用した。

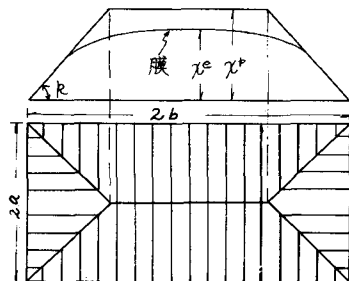


図-2

すなわち、式(2)において $\rho = \chi^e / G a^2 \omega_y$ および x, y を $\chi = a\bar{x}, y = a\bar{y}$ とおけば

$$\partial^2 \rho / \partial \bar{x}^2 + \partial^2 \rho / \partial \bar{y}^2 = -2\omega \quad (4)$$

ここに ω_y : 弾性限界時の捩れ角, $\bar{\omega} = \omega / \omega_y$, a : 標準長

より等分割長 $\lambda = \bar{\lambda} a$ を用いて式(4)を差分表示すれば次式となる(図-3参照)。

$$4\rho_{ij}^e - \rho_{i,j-1}^e - \rho_{i,j+1}^e - \rho_{i-1,j}^e - \rho_{i+1,j}^e = 2\bar{\lambda}^2 \bar{\omega} \quad (5)$$

他方、式(3)も同様に(7)変形すれば

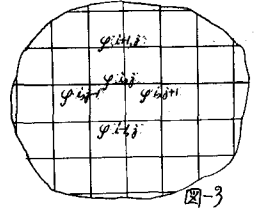
$$\rho_{ij}^p = \bar{C}_{ij} \quad (6)$$

$$\rho = \rho_0 / G a^2 \omega_y, \quad \bar{C}_{ij} = C_{ij} / G a^2 \omega_y$$

i, j : 任意の格点の位置を表わす。

式(5), (6)より格点 (i, j) において弾性および塑性の応力状態いずれの場合にも適用できる一般式が次のように求められる。

$$\begin{aligned} (4d_{ij} + \beta_{ij})\rho_{ij} - d_{ij}\rho_{i,j-1} - d_{ij}\rho_{i,j+1} - d_{i,j-1}\rho_{i,j} - d_{i,j+1}\rho_{i,j} &= 2\bar{\lambda}d_{ij}\bar{\omega} + \beta_{ij}\bar{C}_{ij} \quad (7) \\ \left. \begin{aligned} d_{ij} : \text{弾性域} (\rho_{ij} < \bar{C}_{ij}) \text{ ならば } d_{ij} = 1, \text{ 塑性域} (\rho_{ij} = \bar{C}_{ij}) \text{ ならば } d_{ij} = 0 \\ \beta_{ij} : \text{弾性域} (\rho_{ij} < \bar{C}_{ij}) \text{ ならば } \beta_{ij} = 0, \text{ 塑性域} (\rho_{ij} = \bar{C}_{ij}) \text{ ならば } \beta_{ij} = 1 \end{aligned} \right\} & \quad (8) \end{aligned}$$



式(7)を用辺を除く全格点について求め、境界上の ρ を $\rho = 0$ とおけば次式を得る。

$$\begin{bmatrix} \sigma^{11}(4d+\beta)^2 - \sigma^{12}(d)^2 & -\sigma^{12}(d)^2 & -\sigma^{12}(d)^2 & \dots & -\sigma^{1n}(d)^n \\ -\sigma^{21}(d)^1 & \sigma^{22}(4d+\beta)^2 & -\sigma^{23}(d)^3 & \dots & -\sigma^{2n}(d)^n \\ -\sigma^{31}(d)^1 & -\sigma^{32}(d)^2 & -\sigma^{33}(4d+\beta)^2 & \dots & -\sigma^{3n}(d)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\sigma^{n1}(d)^1 & -\sigma^{n2}(d)^2 & -\sigma^{n3}(d)^3 & \dots & \sigma^{nn}(4d+\beta)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\rho)^1 \\ (\rho)^2 \\ (\rho)^3 \\ \vdots \\ (\rho)^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2\bar{\lambda}^2\bar{\omega}d + \bar{C}\beta)^1 \\ (2\bar{\lambda}^2\bar{\omega}d + \bar{C}\beta)^2 \\ (2\bar{\lambda}^2\bar{\omega}d + \bar{C}\beta)^3 \\ \vdots \\ (2\bar{\lambda}^2\bar{\omega}d + \bar{C}\beta)^n \end{bmatrix} \quad (9)$$

ただし n は分割に関する数、 σ^{IJ} : 微要素 I, J が連結している場合は 1, そうでない場合は 0 であり、 i, j の間には格点通過、次に振りこ-メント T を求めれば、膜理論により次の式で与えられる。

$$T = 2 \int \rho dA = 2\omega_y G a^2 \int \rho dA \quad (10)$$

式(10)を差分表示して

$$T = \omega_y G a^2 \bar{\lambda}^2 \sum (\rho_{ij} + \rho_{i,j+1} + \rho_{i+1,j} + \rho_{i+1,j+1})/2 \quad (11)$$

ここで弾性限界時の振りこ-メントを T_y とすれば式(11)より

$$T_y = \omega_y G a^2 \bar{\lambda}^2 B_0/2 \quad (12)$$

となり、式(11), (12)より次のような無次元化された公式が導かれる。

$$\bar{T} = T/T_y = \sum (\rho_{ij} + \rho_{i,j+1} + \rho_{i+1,j} + \rho_{i+1,j+1})/B_0 \quad (13)$$

ここに B_0 は弾性限界時の境界条件 $d_{ij}=1, \beta_{ij}=0, \bar{\omega}=1, \bar{\lambda}=1$ を式(9), (13)に代入して求められ、また ω_y はこれらの ρ 値を用いて式(12), (13)より次のようにえられる。

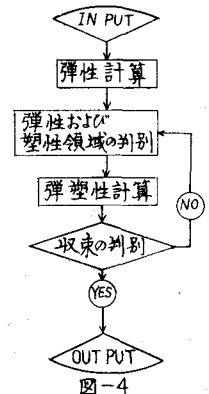
$$T_{max} = M_{max} \{ (\partial \rho / \partial x)^2 + (\partial \rho / \partial y)^2 \}^{1/2} G a \omega_y = k \therefore \omega_y = k / M_{max} \{ (\partial \rho / \partial x)^2 + (\partial \rho / \partial y)^2 \}^{1/2} G a \quad (14)$$

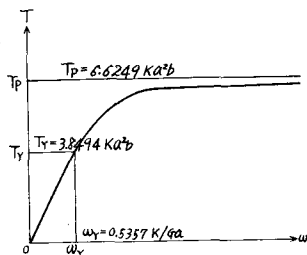
以上から、式(9), (13)と式(8)の判別式を併用すれば、所要の振りこ-メント $\bar{T}$ と $\bar{\omega}$ の関係式が決定されるとことになる。図-4 にその Flow Chart を示す。(但し $\bar{T}$ の $\bar{\omega}$ を求めるには、Newton 法などの逐次近似法を用いなければならない)

IV. 応用例

i) 矩形断面棒 辺長 $2a \times 2b$ (ただし $b/a=2$) をもつ矩形断面棒の弾塑性変形解析を行えば次のとおりである。

いま断面を短辺および長辺をそれぞれ 8 および 16 等分し、各格点を図-5 に示すような番号をつけて表わせば、式(9)は断面の対称性より 32 元連立方程式となる。また式(9)の右辺の $\bar{C}_{ij}$ は勾



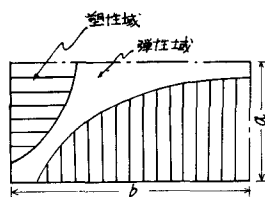
$$\bar{T} = 1.723 - 0.192/\bar{w} - 0.531/\bar{w}^2 \quad (\text{誤差 } 1\%)$$


11) I型断面棒 $\text{IV}-8a)$

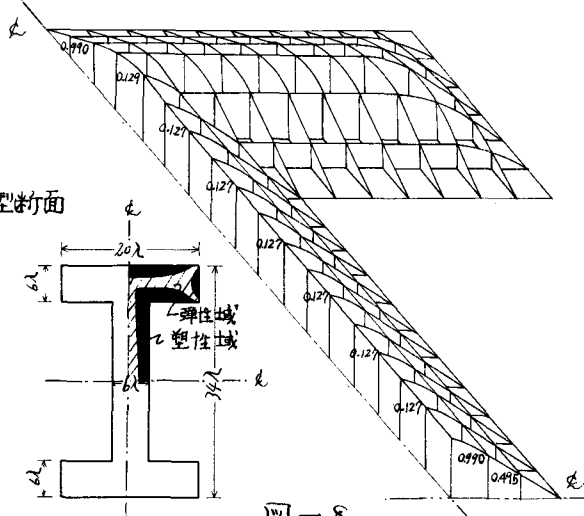
(a) φ 分布图 ($\bar{\omega} = 3.4$)

☞ - 7

(b) 塑性区域分布图 ($\bar{\omega}=3.4$)



(b) ρ 分布図 ($\bar{w}=10.0$)



四一八

(a) I型断面

いて忠実に算定することからできるようになった。他、 T - $\bar{D}$ 曲線に因には定性的によく合致し、しかも T 値の誤差が数%の工学的精度を有する実用式の誘導も可能となった。

(参考文献)

- 1) Hodge. P.G.: Elasto-Plastic Torsion as a Problem in Nonlinear Programming, International Journal of Solids and Structures, Vol. 13, 1967
- 2) 半沢石川; 弾塑性ねじり問題の一理論解法, 日本機械学会論文集(第1部B), 35巻276号, 昭和44年8月
- 3) 小崎友則; 弾塑性捩りの補正理論式に對する実用式, 第20回土木学会學術講演會講演概要, 昭和40年5月